

Correction de l'exercice 2 de l'assistanat pré-quiz final du cours Gestion financière : « Echancier et taux de rentabilité interne d'emprunts à long terme »

Question 1: rappeler la formule donnant les flux à chaque échéance pour chaque type d'amortissement. On distinguera trois flux: le flux initial à la date 0, les flux intermédiaires à une date t quelconque et le flux final à maturité T .

a) Amortissement *in fine*

Les échéances intermédiaires sont uniquement composées du paiement des intérêts. Le capital emprunté est remboursé en une seule fois à maturité (*in fine*). Le montant des intérêts à chaque échéance est constant:

$$I_t = T_p \cdot K_0, \text{ pour } t \text{ variant de } 1 \text{ à } T.$$

Du point de vue de l'emprunteur, la séquence de flux est:

$$F_0 = +K_0$$

$$F_1 = -T_p \cdot K_0$$

$$F_2 = -T_p \cdot K_0$$

...

$$F_T = -T_p \cdot K_0 - K_0$$

b) Amortissement par tranches constantes

Chaque période, un même montant du capital est amorti. Comme les intérêts sont calculés sur un capital décroissant, l'échéance est donc dégressive. Le montant des intérêts I et du capital restant dû K décroît avec le temps:

$$I_1 = T_p \cdot K_0$$

$$\Delta K_1 = K_0/T$$

$$K_1 = K_0 - \Delta K_1 = K_0 - K_0/T$$

$$I_2 = T_p \cdot K_1$$

$$\Delta K_2 = K_0/T$$

$$K_2 = K_1 - \Delta K_2 = K_0 - 2 \cdot K_0/T$$

...

$$I_T = T_p \cdot K_{T-1}$$

$$\Delta K_T = K_0/T$$

$$K_T = K_{T-1} - \Delta K_T = K_0 - T \cdot K_0/T = 0.$$

Du point de vue de l'emprunteur, la séquence de flux est:

$$F_0 = +K_0 \text{ et } F_t = -T_p \cdot K_{t-1} - K_0/T, \text{ pour tout } t \text{ variant de } 1 \text{ à } T.$$

c) Amortissement à annuités constantes

Chaque échéance E_t comprend le paiement des intérêts I_t sur la période et le remboursement d'une partie du capital emprunté ΔK_t . Le montant du remboursement du capital est calculé de façon à ce que l'échéance est constante égale à E :

$$E_t = I_t + \Delta K_t = E.$$

Le montant de l'échéance est calculé par la formule suivante:

$$K_0 = \frac{E}{1+i} + \frac{E}{(1+i)^2} + \dots + \frac{E}{(1+i)^T}$$

ce qui donne:

$$E = K_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-T}}$$

Les montants des intérêts I et du capital restant dû K décroissent avec le temps:

$$I_1 = T_p \cdot K_0$$

$$\Delta K_1 = E - I_1$$

$$K_1 = K_0 - \Delta K_1$$

$$I_2 = T_p \cdot K_1$$

$$\Delta K_2 = E - I_2$$

$$K_2 = K_1 - \Delta K_2$$

...

$$I_T = T_p \cdot K_{T-1}$$

$$\Delta K_T = E - I_T$$

$$K_T = K_{T-1} - \Delta K_T = 0$$

Du point de vue de l'emprunteur, la séquence de flux est:

$$F_0 = +K_0 \text{ et } F_t = -E, \text{ pour tout } t \text{ variant de } 1 \text{ à } T.$$

Question 2: calculer le taux de rentabilité interne de la séquence de flux de l'emprunt pour chaque type d'amortissement.

Par définition, le taux de rentabilité interne (TRI) correspond à la valeur du taux d'actualisation qui annule la séquence de flux de l'emprunt.

Dans le cas d'un amortissement *in fine*, le taux de rentabilité interne est donné par l'équation suivante :

$$K_0 - \sum_{i=1}^{T-1} \frac{i \cdot K_0}{(1+TRI)^i} - \frac{i \cdot K_0 + K_0}{(1+TRI)^T} = 0.$$

Ce qui donne :

$$K_0 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{i \cdot K_0}{(1+TRI)^t} + \frac{i \cdot K_0 + K_0}{(1+TRI)^T}.$$

$$1 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{i}{(1+TRI)^t} + \frac{i+1}{(1+TRI)^T}.$$

$$1 - \frac{1}{(1+TRI)^T} = i \cdot \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+TRI)^t}.$$

$$i = \frac{1 - \frac{1}{(1+TRI)^T}}{\left(\sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+TRI)^t} \right)}.$$

Utilisons les résultats sur la somme de termes géométriques de raison q :

$$q + q^2 + q^3 + \dots + q^T = q \cdot (1-q^T)/(1-q).$$

Il vient alors:

$$i = \frac{1 - \frac{1}{1+TRI}}{\frac{1}{1+TRI}} = TRI.$$

Le taux de rentabilité interne est donc égal au taux d'intérêt nominal i .

Dans le cas d'un emprunt à amortissement par tranches constantes, l'emprunt peut être décomposé en la somme de T emprunts à remboursement *in fine* (dont chaque TRI est égal au taux nominal).

Dans le cas d'un amortissement à échéances constantes, il suffit d'écrire la définition du taux de rentabilité interne, formule identique à celle permettant de calculer l'échéance avec le taux nominal (voir la formule plus haut). Par identification, le TRI est donc égal au taux nominal.

En conclusion, pour les trois types d'amortissement, le taux de rentabilité interne correspond au taux d'intérêt défini dans le contrat.

Question 3: construire l'échéancier de cet emprunt pour chaque type d'amortissement. On précisera le capital restant dû à la fin de chaque année (avant remboursement éventuel du capital), le montant des intérêts payés à la fin de chaque année, le montant du capital éventuellement remboursé à la fin de chaque année, le montant de l'annuité et le capital restant dû à la fin de chaque année (après remboursement éventuel du capital). On présentera les résultats sous forme de tableaux.

a) Amortissement *in fine*

Date	Capital restant dû (avant)	Intérêts	Capital remboursé	Annuité	Capital restant dû (après)
1	1 000 000	100 000	0	100 000	1 000 000
2	1 000 000	100 000	0	100 000	1 000 000
3	1 000 000	100 000	0	100 000	1 000 000
4	1 000 000	100 000	1 000 000	1.100 000	0

b) Amortissement par tranches constantes

Date	Capital restant dû (avant)	Intérêts	Capital remboursé	Annuité	Capital restant dû (après)
1	1 000 000	100 000	250 000	350 000	750 000
2	750 000	75 000	250 000	325 000	500 000
3	500 000	50 000	250 000	300 000	250 000
4	250 000	25 000	250 000	275 000	0

c) Amortissement à annuités constantes

Date	Capital restant dû (avant)	Intérêts	Capital remboursé	Annuité	Capital restant dû (après)
1	1 000 000	100 000	215 471	315 471	784 529
2	784 529	78 453	237 018	315 471	547 511
3	547 511	54 751	260 720	315 471	286 792
4	286 792	28 679	286 792	315 471	0

L'annuité est calculée par la formule:

$$E = 1\,000\,000 \cdot \frac{0,10}{1 - (1+0,10)^{-4}} = 315\,471.$$

Question 4: calculer pour chaque type d'amortissement le coût global de l'emprunt correspondant à la somme non actualisée des intérêts payés sur toute la période. Que penser de la remarque suivante d'un banquier à un trésorier d'entreprise:

“Le type d'amortissement le moins cher est celui par tranches constantes.”?

Par définition, le coût global de l'emprunt (encore appelé le coût du crédit) est égal à la somme non actualisée des intérêts payés sur toute la période de l'emprunt.

Pour les trois types d'amortissement, nous obtenons :

- a) Amortissement *in fine* : 400 000 €
- b) Amortissement par tranches constantes : 250 000 €
- c) Amortissement à échéances constantes : 261 883 €

A caractéristiques égales (montant nominal et taux d'intérêt nominal), c'est l'emprunt à amortissement par tranches constantes qui présente le coût global le plus faible. Il ne faudrait cependant pas en conclure que cet emprunt est “moins cher” que les deux autres ! On a en effet montré précédemment que le coût réel des trois emprunts était identique et égal à 10%. La différence en terme de coût global pour les trois emprunts s'explique par la différence de profil de capital emprunté (ou de façon équivalente remboursé) sur toute la période. Dans le cas d'un emprunt dont le capital est remboursé *in fine*, l'entreprise emprunte plus que pour un emprunt dont le capital a été remboursé progressivement au cours de la période.