

**ESSEC**

**Cours FIN 260**  
**Gestion de portefeuille**

**Séance 8**  
**Mesures de performance**

# Plan

- **Introduction**
- **Mesures de performance des fonds: développements académiques**
  - ❖ Premier niveau: la rentabilité
  - ❖ Deuxième niveau: la rentabilité corrigée du risque
    - *Ratio de Sharpe, ratio de Treynor, alpha de Jensen*
- **Mesures de performance des fonds: approches commerciales**
  - ❖ Morningstar
- **Classement des fonds / Notation des fonds**
- **Analyse de performance**
  - ❖ Attribution de performance: *market timing / stock picking*
  - ❖ Analyse de style
- **Impact de la mesure des performances des fonds**
  - ❖ Création de fonds / Disparition des fonds
  - ❖ Comportement des gérants
  - ❖ Comportement des investisseurs

# Introduction

- **Mesure de la performance des fonds**
  - ❖ Information pertinente
    - *Pour les individus: prise de décision d'investissement*
    - *Pour les gérants: rémunération de leur travail*
  - ❖ Problème délicat
    - *Rentabilité / Rentabilité corrigée du risque / Rentabilité relative par rapport à une référence*
    - *Choix du couple rentabilité/risque optimal différent selon les investisseurs (richesses et aversions au risque différentes)*
- **Analyse de la performance des fonds**
  - ❖ Importance de style de gestion pour atteindre la performance

# Calcul de rentabilités (1)

- **Notations**

- ❖ Valeur du fonds à la date  $t$ :  $V_t$
- ❖ Revenus (dividendes ou intérêts) sur la période  $[t-1, t]$ :  $D_t$
- ❖ Rentabilité du fonds sur la période  $[t-1, t]$ :  $R_t$

- **Rentabilité arithmétique**

$$R_t^a = \frac{V_t + D_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}$$

- **Rentabilité logarithmique**

$$R_t^l = \ln\left(\frac{V_t + D_t}{V_{t-1}}\right)$$

- **Exercice: montrer que les rentabilités arithmétique et logarithmique sont reliées par:**

$$R_t^l = \ln(1 + R_t^a)$$

- **Exercice: représenter graphiquement la rentabilité logarithmique en fonction de la rentabilité arithmétique. Dans quelle zone, la différence entre les deux rentabilités est-elle inférieure à 5%?**

## Calcul de rentabilités (2)

- **Problème pratique:** les rentabilités des fonds sont présentées sous la forme d'un taux annuel. Or, bien des fonds ont plusieurs années d'existence. Comment exprimer la rentabilité sur la vie du fonds sous forme annuelle?

- **Rentabilité arithmétique**

$$\bar{R}^a = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^a$$

- **Rentabilité géométrique**

$$\bar{R}^g = \left( \prod_{t=1}^T (1 + R_t^a) \right)^{1/T} - 1$$

- **Rentabilité logarithmique**

$$\bar{R}^l = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{V_T}{V_0} \right)$$

- **Exercice:** montrer que les rentabilités logarithmique et géométrique sont reliées par:

$$\bar{R}^l = \ln(1 + \bar{R}^g)$$

# Avantages et limites des rentabilités

- **Avantage**

- ❖ Ex post, la rentabilité d'un fonds est la seule variable pertinente pour l'investisseur.

- **Limites**

- ❖ Deux fonds peuvent présenter la même rentabilité mais avoir des évolutions très différentes au cours de la période.
  - *Exemples: fonds monétaire dont la valeur croît régulièrement et fonds actions subissant une forte baisse puis une forte hausse.*
- ❖ Les investisseurs étant (supposés) averses au risque ne peuvent donc prendre leurs décisions sur la seule connaissance des rentabilités brutes. Leur fonction d'utilité dépend du premier moment de la distribution des rentabilités (la moyenne) mais aussi des moments d'ordre supérieur (en particulier la variance qui mesure le risque). Ex ante, la rentabilité (anticipée) du fonds n'est pas suffisante.
- ❖ Besoin de mesures de performance ajustées du risque
  - *Choix d'un modèle théorique pour décrire le comportement statistique des rentabilités*
  - *Choix d'une mesure pour le risque*

# Critères de rentabilité et de risque

- **Problématique**
  - ❖ Comment intégrer à la fois le critère de rentabilité (anticipée) et le critère de risque pour comparer deux fonds?
- **Exemple**
  - ❖ Considérons trois fonds:
    - *Fonds 1*:  $\mu = 10\%$  et  $\sigma = 15\%$
    - *Fonds 2*:  $\mu = 8\%$  et  $\sigma = 20\%$
    - *Fonds 3*:  $\mu = 15\%$  et  $\sigma = 20\%$
  - ❖ Exercice: déterminer le classement de ces fonds pour un investisseur averse au risque.
- **Nécessité de développer une mesure intégrant les deux critères**
  - ❖ Mesure simple et cohérente

# Le ratio de Sharpe

- **Hypothèses: cadre du Medaf (CAPM)**
  - ❖ Modélisation statistique des rentabilités
    - *Distribution normale*
    - *Absence d'auto-corrélation*
  - ❖ Existence d'un taux sans risque (taux emprunteur et prêteur)

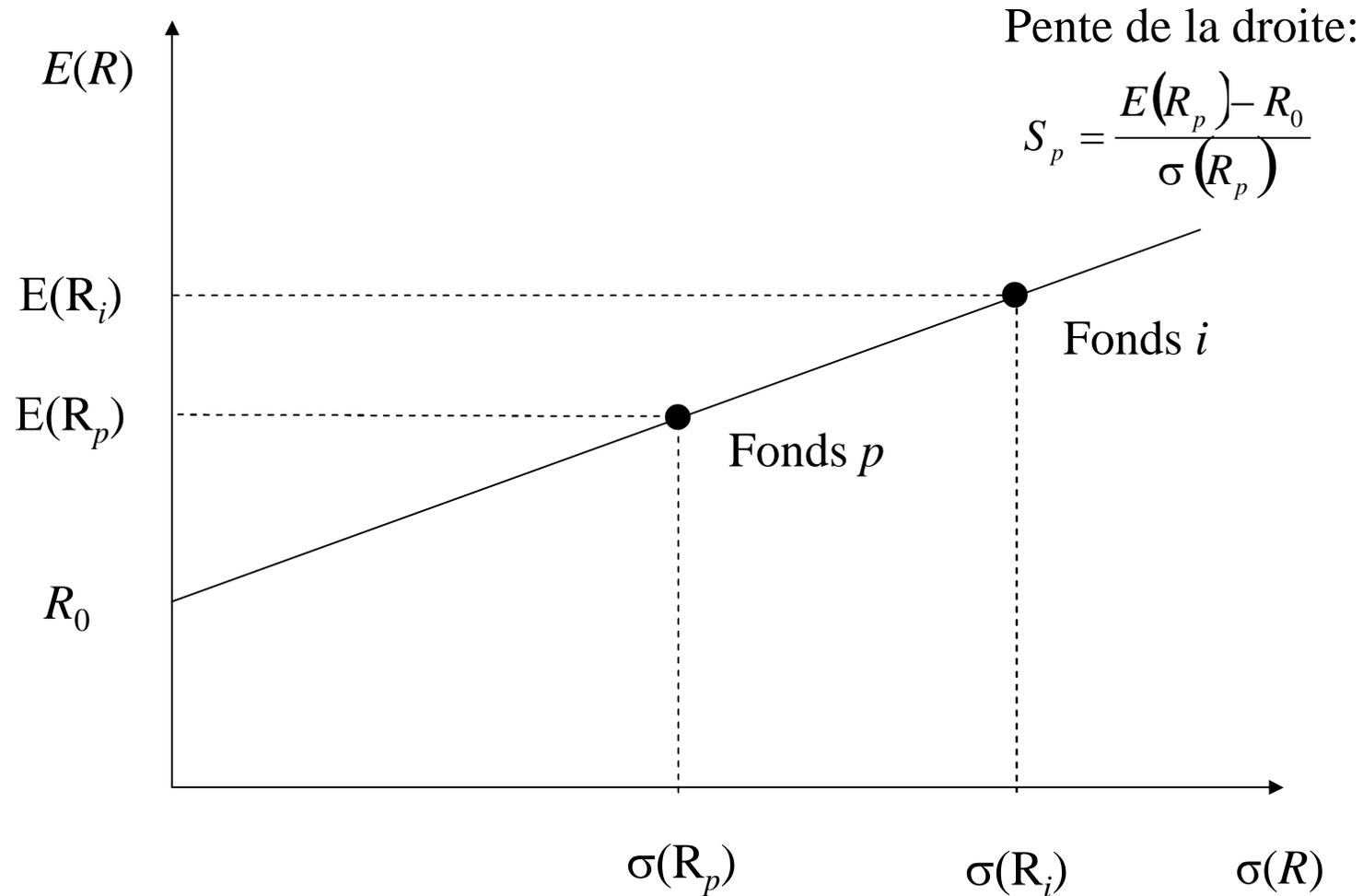
- **Définition**

- ❖ Le ratio de Sharpe (S) correspond à la rentabilité en excès du taux sans risque par unité de risque, le risque étant mesuré par l'écart-type:

$$S_p = \frac{E(R_p) - R_0}{\sigma(R_p)}$$

- ❖ Exercice: montrer que le ratio de Sharpe n'est pas invariant en changeant la fréquence des rentabilités (mensuelle / annuelle par exemple).

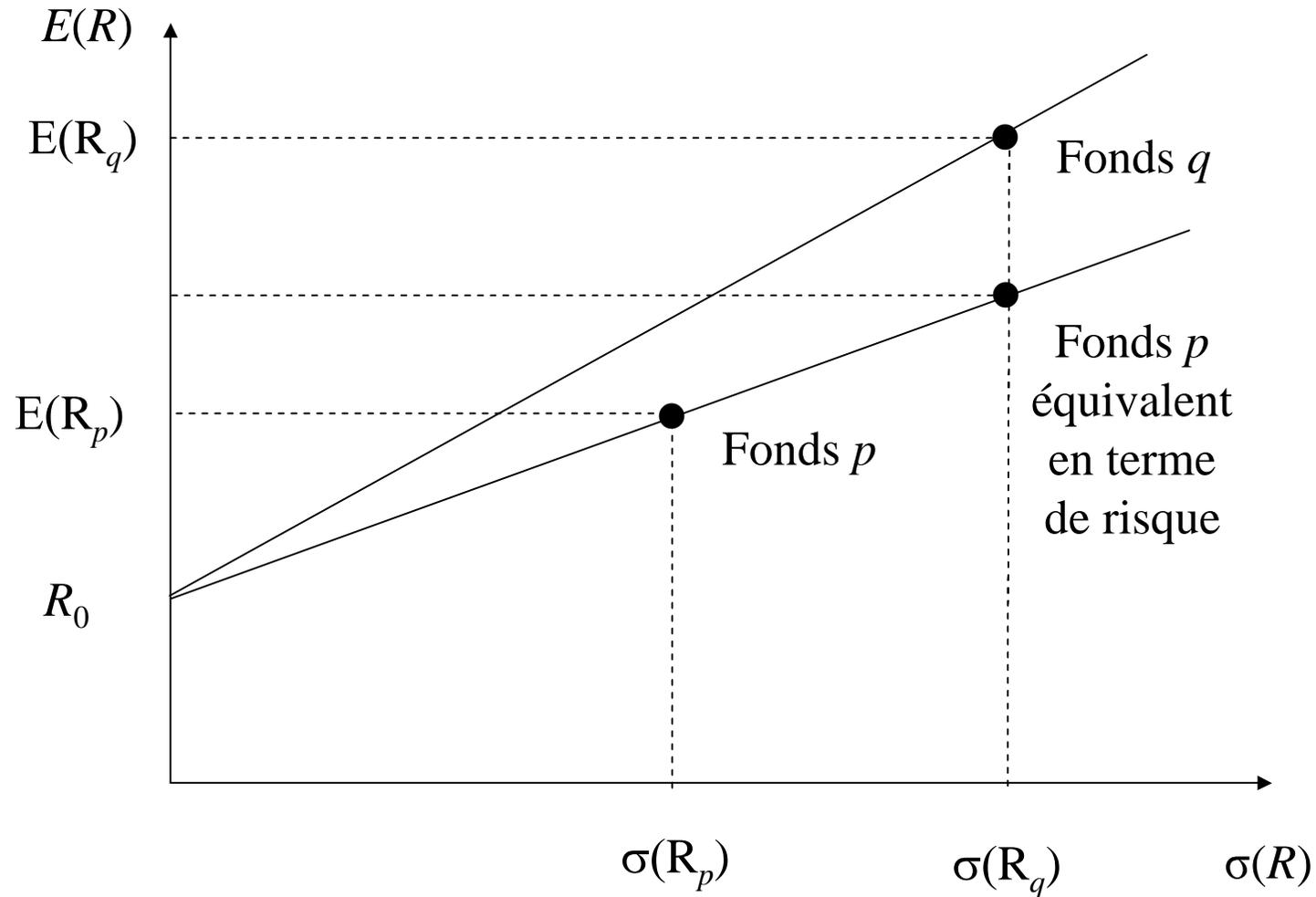
# Représentation graphique du ratio de Sharpe



# Interprétation du ratio de Sharpe

- Tous les fonds  $i$  qui se trouvent sur la demi-droite passant par l'actif sans risque et le fonds  $p$  ont le même ratio de Sharpe que le fonds  $p$ .
- **Exercice: montrer qu'un fonds investi en proportion  $x$  dans le fonds  $p$  et en proportion  $1-x$  dans l'actif sans risque a le même ratio de Sharpe que le fonds  $p$ .**
- La pente de la demi-droite est égale au ratio de Sharpe de fonds  $p$  (comme celui de tous les fonds situés sur cette demi-droite).
- **Exercice: expliquer pourquoi deux fonds présentant le même ratio de Sharpe peuvent être considérés comme ayant la même performance ajustée pour le risque. Que signifie « ajuster pour le risque »?**
- **Classement des fonds selon leurs ratios de Sharpe**
  - ❖ Considérons 2 fonds avec le même risque (même valeur de l'écart-type).
  - ❖ Le fonds avec le ratio de Sharpe le plus élevé a donc la rentabilité excédentaire par rapport au taux sans risque la plus élevée et est donc le plus performant (même risque mais rentabilité anticipée supérieure).
  - ❖ **Exercice: illustrer graphiquement le classement des fonds.**
- **Cohérence entre le résultat du Medaf et le ratio de Sharpe**

# Interprétation du ratio de Sharpe (2)



# Limites du ratio de Sharpe

- **Limites théoriques**

- ❖ Les distributions des rentabilités ne sont pas normales.
- ❖ Les rentabilités présentent souvent de l'auto-corrélation.
- ❖ Le taux sans risque n'est pas constant dans le temps et peut être corrélé avec les actifs risqués.
- ❖ *Exercice: montrer que le ratio de Sharpe ne convient pas lorsque les primes de risque sont négatives.*

- **Limites pratiques**

- ❖ *Exercice: expliquer comment estimer le ratio de Sharpe. Quels problèmes peuvent survenir en pratique?*
- ❖ Il est possible d'accroître artificiellement le ratio de Sharpe d'un fonds.
  - *Exemple: vente de puts en dehors de la monnaie. Chicago Art Institute (perte de 43 M\$).*
  - *Exercice: expliquer comment ce type de stratégie permet d'accroître le ratio de Sharpe.*

# Le ratio de Treynor

- **Mêmes hypothèses que pour le ratio de Sharpe**
- **Définition**
  - ❖ Le ratio de Treynor ( $T$ ) correspond à la rentabilité en excès du taux sans risque par unité de risque, le risque étant mesuré par le beta:

$$T_p = \frac{E(R_p) - R_0}{\beta(R_p)}$$

- ❖ Il s'agit d'une variante du ratio de Sharpe: le risque considéré est le risque systématique (non diversifiable) et non le risque global.
- ❖ Exercice: rappeler la relation entre le risque global, le risque systématique (non diversifiable) et le risque non systématique (diversifiable).
- ❖ Exercice: comparer les ratios de Sharpe et de Treynor pour un titre individuel et pour un fonds.

# L'alpha de Jensen

- **Cadre du Medaf**

- ❖ Mêmes hypothèses que pour le ratio de Sharpe
- ❖ Le portefeuille  $p$  est sur la droite de marché (*security market line* ou SML).
- ❖ La performance du fonds  $p$  est appréciée par rapport à sa performance anticipée:

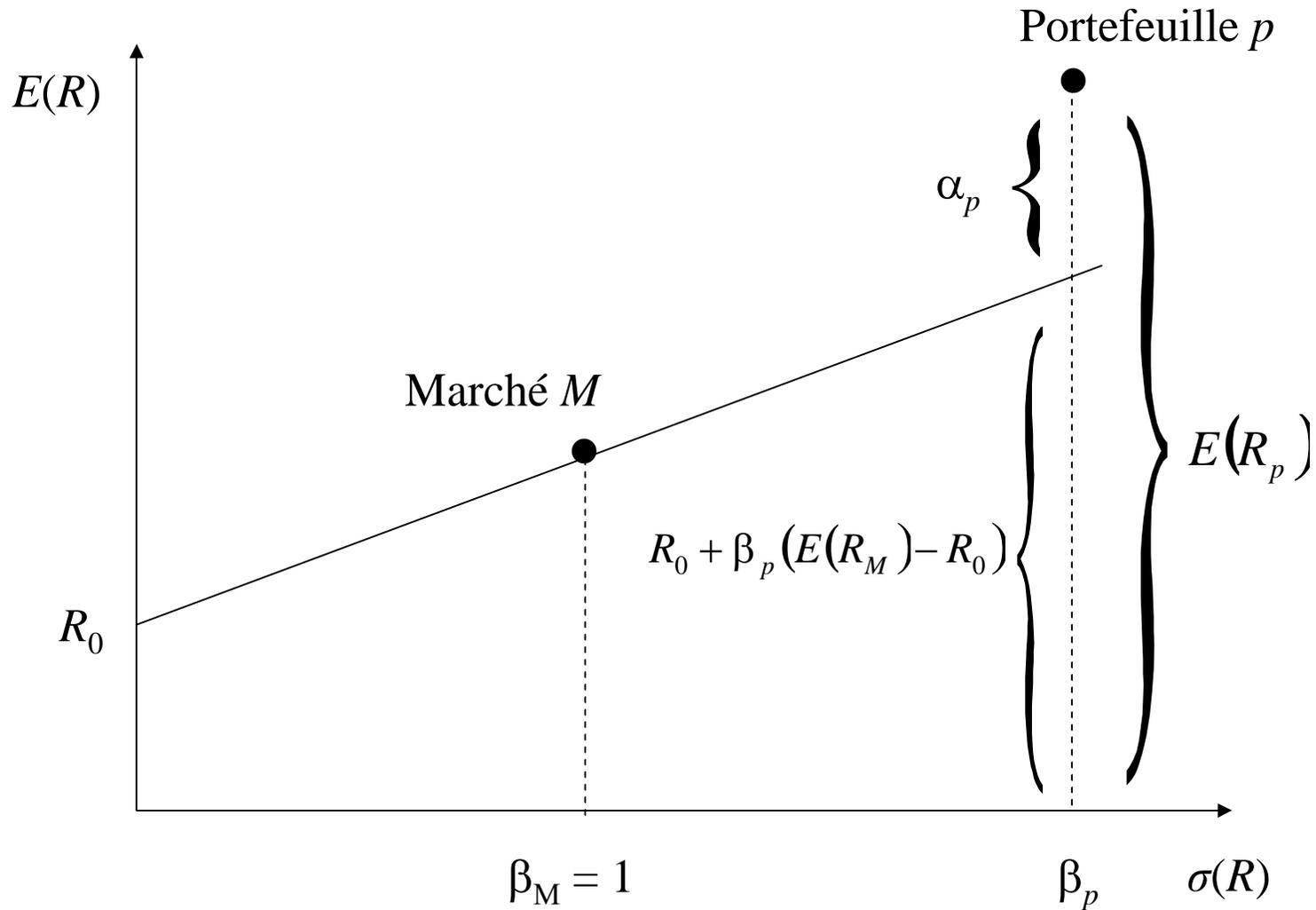
$$R_0 + \beta_p (E(R_M) - R_0)$$

- **Définition**

- ❖ L'alpha de Jensen correspond à la rentabilité en excès de l'anticipation donnée par le Medaf.

$$\alpha_p = E(R_p) - (R_0 + \beta_p (E(R_M) - R_0))$$

# Représentation graphique de l'alpha de Jensen



# Interprétation de l'alpha de Jensen

- $\alpha > 0$ : sur-performance
- $\alpha < 0$ : sous-performance
- **La sur-performance est attribuée à la capacité du gérant à sélectionner des titres (*stock picking*)**
  - ❖ Achat de titres sous-évalués (avec une rentabilité future anormalement forte)
  - ❖ Vente à découvert de titres sous-évalués (avec une rentabilité future anormalement faible)
- **L'alpha de Jensen mesure la performance du fonds par rapport à son anticipation donnée par un modèle (le Medaf). En particulier, le niveau de risque est pris en compte (le bêta du fonds).**

# Estimation de l'alpha de Jensen

- **Exercice: expliquer comment estimer l'alpha de Jensen en pratique.**
- **Exercice: montrer que l'alpha de Jensen peut être estimé par une méthode de régression linéaire.**

# Classement des fonds en catégories (1)

- **Définition**

- ❖ Une catégorie regroupe des fonds (relativement) homogènes en termes d'actifs investis (type d'actifs, zone géographique, secteur, style de gestion, etc.).

- **Exemples**

- ❖ Classement des fonds par l'Autorité des Marchés Financiers (AMF)
  - *5 familles de fonds: Trésorerie, Actions, Obligations, Diversifiés et OPCVM garantis*
  - *21 types: pour les fonds Actions: Actions françaises, Actions zone euro, Actions européennes, Actions internationales, Actions Amérique du Nord, Actions Asie/Pacifique, Actions sectorielles*
  - *49 catégories*
- ❖ Classement des fonds par Morningstar
  - *4 familles de fonds: domestic equities, foreign equities, (tax exempt) municipal bonds et taxable bonds*

# Classement des fonds en catégories (2)

- **Motivation**

- ❖ Aider les investisseurs (individuels) dans le choix de leurs fonds
  - *Information sur la rentabilité et le risque*
- ❖ Classer les fonds selon leur performance
  - *Les fonds d'une même catégorie devraient être comparables en termes de performance*
  - *Palmarès annuels des fonds publiés par les revues financières*

# L'approche de Morningstar (1)

- **Morningstar: société américaine créée en 1984 dont l'activité est de noter les fonds (en fonction de leur performance)**
- **Processus à deux niveaux**
  - ❖ Sélection des fonds
  - ❖ Classement des fonds
    - *Catégorie*
    - *Performance au sein de chaque catégorie*
- **Sélection des fonds (méthode qualitative)**
  - ❖ La stratégie d'investissement du fonds doit être saine (long terme et gérants expérimentés).
  - ❖ Les frais doivent être raisonnables.
  - ❖ La stratégie, le nom des gérants et les coûts doivent être publics.
  - ❖ L'intérêt des gérants de portefeuille et des dirigeants de la société de gestion doivent être liés aux investisseurs dans les fonds.

# L'approche de Morningstar (2)

- **Notation des fonds: « *star rating* » (méthode quantitative)**
  - ❖ Classement des fonds à l'intérieur d'une catégorie Morningstar (et non d'une classe générale)
    - *4 classes / 48 catégories*
    - *Idée: différencier la part de la performance du fonds liée à la catégorie (conditions de marché) et la part de la performance du fonds liée au gérant (qualité du gérant en termes de stock picking et market timing)*
  - ❖ *Mesure du risque d'un fonds: Morningstar risk adjusted return (MRAR)*

# L'approche de Morningstar (3)

- **Rentabilité mensuelle globale:  $TR$  (total return)**

$$TR = \left\{ \frac{P_e}{P_b} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{D_i}{P_i} \right) \right\} - 1$$

- **Rentabilité cumulée (cumulative value)**

$$V_u = \prod_{t=1}^T (1 + TR_t)$$

- **Rentabilité cumulée ajustée des droits d'entrée et de sortie**

$$V = (1 - F) \cdot (1 - R) \cdot V_u$$

- **La mesure de Morningstar est fondée sur la théorie de l'utilité.**

- ❖ En avenir incertain, les agents maximisent l'espérance de l'utilité de leur richesse finale:

$$E(u(W_T))$$

- ❖ Exercice: rappeler l'interprétation économique de l'hypothèse d'une fonction d'utilité croissante et concave.

# L'approche de Morningstar (4)

- **Fonction d'utilité choisie par Morningstar:**

$$u(W_T) = \begin{cases} -\frac{W^{-\gamma}}{\gamma} & \text{pour } \gamma > -1, \gamma \neq 0 \\ \ln(W) & \text{pour } \gamma = 0 \end{cases}$$

- ❖ Exercice: montrer que cette fonction d'utilité correspond à des individus avec une aversion relative au risque constante (*constant relative risk aversion* ou CRRA):

$$RRA(W) = -\frac{W \cdot u''(W)}{u'(W)} = \gamma + 1.$$

- ❖ Exercice: montrer que la richesse initiale n'affecte pas la courbure de la fonction d'utilité et donc la façon dont les investisseurs ordonnent les portefeuilles. Quelles est l'implication pratique de cette propriété?

$$u(W_T) = u(W_0 \cdot (1 + TR)) = \begin{cases} -\frac{W_0^{-\gamma}}{\gamma} u(1 + TR) & \text{pour } \gamma > -1, \gamma \neq 0 \\ \ln(W_0) + u(1 + TR) & \text{pour } \gamma = 0 \end{cases}$$

# L'approche de Morningstar (5)

- **Richesse initiale**

$$W_0 = \frac{1}{1 + R_b}$$

où  $R_b$  est le taux sans risque sur la période

$$u(W_T) = u(W_0 \cdot (1 + TR)) = u\left(\frac{1 + TR}{1 + R_b}\right) = u(1 + r_G) = \begin{cases} -\frac{(1 + r_G)^{-\gamma}}{\gamma} & \text{pour } \gamma > -1, \gamma \neq 0 \\ \ln(1 + r_G) & \text{pour } \gamma = 0 \end{cases}$$

où  $r_G$  est la rentabilité géométrique du fonds en excès du taux sans risque

$$r_G = \frac{1 + TR}{1 + R_b} - 1$$

- **Equivalent certain: rentabilité garantie équivalente en termes d'utilité:**

$$u(1 + r_G^{CE}(\gamma)) = E(u(1 + r_G))$$

# L'approche de Morningstar (6)

- **Equivalent certain**

$$r_G^{CE} = \begin{cases} E\left(\left(1+r_G\right)^{-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} & \text{pour } \gamma > -1, \gamma \neq 0 \\ e^{E(\ln(1+r_G))} & \text{pour } \gamma = 0 \end{cases}$$

- **MRAR**

$$MRAR(\gamma) = \begin{cases} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (1+r_{Gt})^{-\gamma}\right)^{\frac{12}{\gamma}} - 1 & \text{pour } \gamma > -1, \gamma \neq 0 \\ \left(\prod_{t=1}^T (1+r_{Gt})\right)^{\frac{12}{T}} - 1 & \text{pour } \gamma = 0 \end{cases}$$

- ❖ Dans le cas  $\gamma = 0$ ,  $MRAR(0)$  correspond à la rentabilité géométrique moyenne du fonds.
- ❖ Dans le cas  $\gamma > 0$ ,  $MRAR(\gamma)$  prend en compte le risque. Plus  $\gamma$  est élevé, plus le risque est pénalisé.
- ❖ Pour son système de notation, Morningstar a choisi:  $\gamma = 2$ .

# L'approche de Morningstar (7)

- **Décomposition du MRAR**

$$MRAR(2) = MRAR(0) + [MRAR(2) - MRAR(0)]$$

- ❖ Deux composantes:

- *MRAR(0): rentabilité*

- *MRAR(2)-MRAR(0): risque*

- **Notation des fonds (au sein d'une catégorie)**

- ❖ Calcul du MRAR pour chaque fonds

- ❖ Rangement des fonds par MRAR décroissant

- ❖ Notation des fonds selon leur rang

- \*\*\*\*\*: 0 - 10%

- \*\*\*\*\*: 10 - 32,5%

- \*\*\*: 32,5% - 67,5%

- \*\*: 67,5% - 90%

- \*: 90% - 100%

# Performance relative

- **Choix d'une référence (*benchmark*)**
  - ❖ Importance dans la gestion du fonds:
    - *Investissement dans un actif de référence*
      - Exemple: fonds actions qui veut reproduire un indice d'actions (comme le CAC 40)
    - *Investissement en rapport à un actif de référence*
      - Exemple: fonds actions qui veut surperformer (battre) un indice d'actions (comme le CAC 40)
  - ❖ Importance pour la mesure de la performance du fonds
    - *Classement des fonds regroupés en catégories*
      - Il est souvent associé une référence à une catégorie.

# Mesures de la performance relative

- **Mesure de la performance relative**

- ❖ Différence entre la performance du fonds et la performance de la référence (*tracking error*):

$$\varepsilon_{p,t} = R_{p,t} - R_{M,t}$$

- **Mesure du risque de la performance relative**

- ❖ Variance / écart-type de la différence entre la performance du fonds et la performance de la référence:

$$\sigma(\varepsilon_p) = \sigma(R_p - R_M)$$

- ❖ Valeur à risque (*value at risk* ou VaR) de la différence entre la performance du fonds et la performance de la référence

# Analyse des performances

- **Attribution de performance / Analyse de style**

- ❖ Objectif: comprendre le mode de gestion du fonds pour comprendre la formation de la performance du fonds
- ❖ Exemple: stock picking / market timing

$$\tilde{R}_{p,t} = \alpha_p + \beta_p \tilde{R}_{M,t} + \tilde{\varepsilon}_{p,t}$$

- *La capacité à bien sélectionner les titres (stock picking) est capturée par le coefficient alpha de la régression.*
- *La capacité à bien anticiper la direction du marché (market timing) est capturée par le coefficient bêta (supposé stable sur la période d'estimation).*
- ❖ Exemple: utilisation d'options (exemple vente de *puts*)

$$\tilde{R}_{p,t} = \alpha_p + \beta_p \tilde{S}_t + \tilde{\varepsilon}_{p,t}$$

# Impact de la mesure des performances des fonds

- **Création de fonds**

- ❖ Contexte: il est préférable de disposer d'un bon historique de performance pour commercialiser un fonds (argument marketing).
- ❖ Pratique courante: plusieurs fonds sont lancés en interne et seul le meilleur fonds est commercialisé.

- **Comportement des gérants**

- ❖ Gestion en fonction des classements
  - *Augmentation ou diminution du risque du fonds selon le classement du fonds en cours d'année*

- **Comportement des investisseurs**

- ❖ Investissements / désinvestissements en fonction des performances passées

- **Disparition des fonds**

- ❖ Les fonds qui présentent de mauvaises performance sont absorbés par les fonds les plus performants.