

Value at Risk: Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes

François LONGIN*

RÉSUMÉ. – Cet article présente la théorie des valeurs extrêmes et son application au calcul de la value at risk d'une position de marché. Cette théorie statistique permet de quantifier le comportement des mouvements extrêmes de prix et de taux de sorte qu'une nouvelle mesure du risque de faillite peut être définie. Elle est utilisée pour calculer la value at risk d'une position sur le marché boursier français. Les résultats de la méthode des valeurs extrêmes sont comparés à ceux des méthodes traditionnelles qui décrivent le comportement statistique de toutes les rentabilités. Ces résultats empiriques permettent d'analyser la réglementation française en matière de risques de marché.

Value at Risk: A New Approach Based on Extreme Values

ABSTRACT. – This paper presents extreme value theory and its application to the computation of the value at risk of a position. This statistical theory allows quantification of the behavior of extreme movements in prices and rates such that a new measure for catastrophe or bankruptcy risk can be defined. Empirically, it is shown that the Fréchet distribution models this type of movement well. Extreme movements are associated with both little tremors like market adjustments or corrections during ordinary periods, and also earthquake-like stock market crashes, bond market collapses or foreign exchange crises observed during extraordinary periods. The approach based on extreme values then covers market conditions ranging from the usual environment considered by the existing VaR methods to the financial crises which are the focus of stress testing. The approach based on extreme values is then applied to a position in the French stock market using extreme value theory which characterizes the limit distribution of extreme returns. This method is then compared to different methods of the traditional approach which describe the statistical behavior of all returns (the historic distribution, the normal distribution and conditional processes like the GARCH process or the exponential weighted moving average used in RiskMetrics™ used to describe the variance). These empirical results allow to evaluate the French regulation on market risks.

* F. LONGIN: ESSEC. Cette recherche a bénéficié du soutien financier du CERESSEC. Nous remercions tout particulièrement Jean-Pierre Laffargue (éditeur) ainsi que les deux arbitres anonymes pour leurs remarques et conseils. Nous remercions aussi Jean-François Boulier, Rama Cont, Richard Dalaud, Jean-François Dauvisis, Daniel Dumas de Raully, Georges Gallais-Hamonno, Ole Kold Hansen, Patrice Poncet, Roland Portrait, Benjamin Sahel et C. K. Tran, et les participants de la Conférence MGI sur les "Risques de Marchés" (Paris, Juillet 1996), de la Conférence de l'Association Française de Finance (Grenoble, Juin 1997) et du séminaire Bachelier (Paris, Octobre 1997) pour leurs commentaires.

1 Introduction

Le concept de *Value at Risk* (VaR) s'est imposé comme la mesure de référence en matière de risques de marché. La VaR d'une position est un nombre censé mesurer et résumer le risque encouru sur une position. Elle est définie comme la perte potentielle maximale pour une probabilité fixée sur une période donnée ¹. Les risques considérés sont généralement ceux liés aux fluctuations des taux d'intérêt, du cours de change des monnaies, du prix des actions et du cours des matières premières.

L'origine du concept de VaR peut être trouvée dans le rapport des activités de marché de JP Morgan demandé chaque jour par son ancien président Dennis Weatherstone, qui insistait pour voir de façon agrégée le risque des différentes positions de la banque (d'après la revue Risk, 1995). L'utilisation de la VaR fut aussi recommandée par le Groupe des Trente [1993] qui regroupe des institutions financières internationales. La mesure des risques de marché s'est peu à peu répandue ces dernières années dans les banques pour deux raisons : leurs résultats étaient de plus en plus influencés par les activités de marché et les positions des opérateurs sur certains marchés, comme celui des produits dérivés, s'amplifiaient et allaient jusqu'à mettre en danger la pérennité de certaines institutions.

Mais si le concept de VaR a trouvé son origine dans le milieu bancaire, la généralisation récente de son utilisation par les institutions financières est largement due aux instances de réglementation ². En avril 1995, le Comité de Bâle a annoncé que les banques commerciales pouvaient utiliser cette mesure du risque pour calculer la charge en fonds propres correspondant à leurs risques de marché. La formule retenue par le Comité de Bâle pour la charge en fonds propres notée *CFP* est donnée par :

$$(1) \quad CFP_{t+1} = \text{Max} \left(\text{VaR}_t, (m + \alpha) \cdot \frac{1}{60} \cdot \sum_{j=t-60}^{j=t-1} \text{VaR}_j \right),$$

où m est un facteur multiplicatif (*scaling factor* en anglais) dont la valeur est fixée (arbitrairement?) à 3, α un facteur additionnel (*plus factor* en anglais) dont la valeur comprise entre 0 et 1 dépend de la qualité de prévisibilité du modèle interne développé par l'institution considérée (voir la recommandation du Comité de Bâle, 1996a), VaR_j la VaR calculée

-
1. Une présentation générale du sujet peut être trouvée dans WILSON [1996] et JORION [1997]. KERBAUL, MAYET et PILLIARD [1997] traitent plus particulièrement de la mise en application de la VaR par les banques françaises.
 2. KUPIEC et O'BRIEN [1996] présentent en détail les différentes approches retenues par les autorités de réglementation : l'approche standard du Comité de Bâle de la Banque des Règlements Internationaux et de l'Union Européenne, l'approche des modèles internes pris en compte récemment par ces deux mêmes institutions, et l'approche de l'engagement ex ante (*Pre-Commitment approach* en anglais) proposée par le Federal Reserve Board.

par le modèle interne le jour j , t la date d'arrêté et $t + 1$ la date d'application ³. En France, comme l'explique NOUY [1996], la Commission Bancaire (Règlement n° 95-02 du Comité de Règlementation Bancaire, 1995) a finalement adopté en application de la directive d'adéquation des fonds propres de l'Union Européenne (*Capital Adequacy Directive* CAD, juin 1993) une formule un peu différente :

$$(2) \quad CFP_{t+1} = \text{Max} \left(CFPMS_t, CFPMS_t \cdot \frac{\text{VaR}_t}{\text{VaR}_{t'}}, m \cdot \text{VaR}_t \right),$$

dans laquelle la charge en fonds propres calculée d'après la méthode standard de la CAD, notée $CFPMS$, est comparée à la VaR donnée par le modèle interne, m étant le même facteur multiplicatif que la méthode du Comité de Bâle, t la date d'arrêté, $t + 1$ la date d'application et t' une date de référence passée.

Les deux formules ci-dessus montrent l'importance accordée par les instances de réglementation au concept de VaR. L'approche traditionnelle de la VaR consiste à étudier la loi des variations de valeur de la position sur une période donnée. Différentes méthodes sont actuellement développées et testées dans les banques depuis que les autorités de réglementation s'orientent vers une certaine auto-réglementation du secteur bancaire en matière de fonds propres (possibilité d'utiliser un modèle interne). Les principales méthodes de l'approche traditionnelle peuvent être classées en trois catégories : la méthode de simulation historique, la méthode de simulation de Monte Carlo, et la méthode de variance-covariance. Les méthodes sont appliquées soit directement sur la position agrégée, soit sur des facteurs de risques (indices boursiers nationaux, cours des devises, principaux taux d'intérêt,...) sur laquelle la position peut être décomposée.

La méthode de simulation historique utilise les réalisations passées des facteurs de risque. Cette méthode évalue l'impact qu'aurait l'évolution passée des prix sur la valeur de la position considérée à un horizon donné. La méthode historique permet de tenir compte des caractéristiques réelles de la distribution statistique des facteurs de risque tels que l'asymétrie entre les parties gauche et droite de la distribution correspondant aux chocs négatifs et positifs, les changements de la volatilité associés à des successions de périodes calmes et agitées, et l'importance des événements rares. En pratique, les banques appliquent cette méthode sur un passé relativement récent (utilisation d'une année de données historiques par exemple) afin de ne considérer que les conditions de marché actuelles.

La méthode de simulation de Monte Carlo utilise un modèle économétrique pour déterminer l'évolution des facteurs de risque au cours du temps, les paramètres de ce modèle étant fixés par l'utilisateur ou estimés à partir de données passées. Alors que la méthode de simulation historique repose sur le seul scénario basé sur le comportement passé des marchés, la méthode de simulation de Monte Carlo repose sur une multitude de

3. Les formules données par les autorités de réglementation sont analysées à la fin de cet article à la lumière des résultats sur les extrêmes.

scénarios aléatoires définis à partir du modèle économétrique. La méthode de simulation de Monte Carlo est flexible en terme de modélisation et permet de traiter toutes les positions de marché une fois que le comportement des prix des différents produits composant le portefeuille a été modélisé.

La méthode de variance-covariance encore appelée méthode de corrélation suppose que les rentabilités des facteurs de risque sont distribuées comme une loi normale multivariée, que les corrélations entre ces facteurs sont stables au cours du temps et que la sensibilité de la position aux facteurs (le delta de la position) est constante. La matrice de variance-covariance ou de corrélation est estimée à partir d'observations passées d'après un modèle statistique spécifié. L'hypothèse de normalité et de linéarité de la position en fonction des facteurs de risque permet un calcul analytique de la VaR.

Les outils de gestion du risque actuellement développés par les banques et par les sociétés de services en informatique s'inspirent des trois méthodes précédemment mentionnées. Par exemple, le produit CharismaTM de Chase Manhattan utilise la méthode de simulation historique, la version commercialisée Raroc 2020TM de Bankers Trust utilise la méthode de simulation de Monte Carlo avec 400 facteurs de risques spécifiés, et le produit RiskMetricsTM proposé par JP Morgan utilise pour certains types de position la méthode de variance-covariance.

Comme il a souvent été remarqué (Risk 1995), les méthodes existantes prennent difficilement en compte les variations extrêmes de prix observées sur les marchés financiers. Par exemple, le krach boursier d'octobre 1987 à Wall Street (un événement d'amplitude égale à 20 écarts-types de la distribution des rentabilités de l'indice Standard and Poor's 500) devrait se produire en moyenne moins d'une fois tous les 100 millions d'années dans un univers gaussien. De même, appliquer la méthode historique sur un passé trop récent ne permet pas de tenir compte des conditions de marché qui se répètent peu souvent. Pour cette raison technique liée aux difficultés de modélisation des queues des distributions statistiques, les méthodes de calcul de VaR sont souvent complétées par des analyses s'intéressant en particulier aux grands chocs de marché comme le *stress testing* utilisant des simulations de scénarios catastrophes.

Les événements extrêmes occupent une place centrale en finance et notamment dans le domaine de la gestion des risques financiers. La performance d'une banque sur une période donnée est souvent le fait de quelques journées exceptionnelles, la plupart des journées de trading ne contribuant que marginalement au résultat. De plus, les conditions de crise intéressent davantage les instances de réglementation que les conditions normales : les autorités sont concernées par la protection du système financier contre les événements catastrophes tels que le krach boursier d'octobre 1987, l'ébranlement des monnaies du Système Monétaire Européen en septembre 1992 ou encore les déboires du marché obligataire en février 1994 qui peuvent être à la source du risque systémique. Les fonds propres doivent en principe couvrir les pertes d'une institution de sorte qu'elle puisse continuer à exister même après un grand choc.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche pour aborder le problème de la VaR. Alors que, traditionnellement, l'approche consiste à modéliser la distribution de *toutes* les rentabilités possibles de la position,

nous ne retenons ici que les rentabilités *extrêmes*. Nous proposons aussi une méthode que nous appelons méthode des valeurs extrêmes qui permet de mettre en œuvre notre approche en pratique. La VaR que nous calculons utilise les rentabilités extrêmes du marché définies comme la rentabilité la plus élevée (le maximum) et la rentabilité la plus basse (le minimum) observées sur une période donnée. Notons que les rentabilités extrêmes définies dans un sens statistique peuvent être obtenues lors de périodes usuelles correspondant au fonctionnement normal du marché et lors de périodes agitées correspondant aux crises financières. Nous considérons donc à la fois les petites secousses et les tremblements de terre affectant les marchés financiers. Cet article propose d'utiliser explicitement les valeurs extrêmes pour calculer la VaR d'une position de marché.

La mesure statistique du risque considérée dans cet article est une mesure du risque extrême définie à partir des queues des distributions; ce n'est pas une mesure du risque global comme la variance utilisée dans la méthode de variance-covariance. Comme nous l'avons déjà mentionné dans LONGIN [1994], le choix du niveau des fonds propres des institutions financières est relié au risque de faillite. Pour cette raison, le niveau des fonds propres devrait être directement déduit des queues de distribution et il ne devrait pas être fondé sur une mesure du risque global utilisant toute la distribution. L'outil utilisé s'appelle la théorie des valeurs extrêmes qui décrit le comportement statistique des termes maximum et minimum d'un processus aléatoire. Empiriquement, dans LONGIN [1993], nous avons montré par des tests statistiques que les extrêmes observés sur les marchés financiers obéissaient à la loi de Fréchet donnée par la théorie. Cette loi statistique est à la base de notre méthode de calcul de la VaR. La méthode des valeurs extrêmes tient compte à la fois des conditions normales de marché étudiées par les méthodes existantes de calcul de VaR et des conditions de crise qui font l'objet d'une attention spéciale dans les méthodes de *stress testing* qui simulent des scénarios catastrophes.

La première partie de cet article introduit la théorie des valeurs extrêmes. La deuxième partie présente notre méthode pour calculer la VaR d'une position de marché à partir de la théorie des valeurs extrêmes. Celle-ci est illustrée à partir d'un exemple numérique et comparée aux méthodes de l'approche traditionnelle. La conclusion rappelle l'importance des valeurs extrêmes sur les marchés financiers et de leur prise en compte pour la gestion des risques.

2 Présentation de la théorie des valeurs extrêmes

Cette partie présente des résultats statistiques concernant la loi des observations extrêmes d'une série aléatoire. Le théorème de base qui considère un processus dont les variables sont indépendantes et identique-

ment distribuées (i.i.d.) est exposé tandis que de nouvelles avancées concernant les processus conditionnels sont aussi discutées ⁴.

2.1. Résultats exacts

Cette sous-partie présente quelques résultats statistiques exacts sur les extrêmes. Le phénomène observé est mesuré par une variable aléatoire notée r . En pratique, le phénomène est la fluctuation de la valeur d'une position et la variable aléatoire r n'est autre que la rentabilité de cette position calculée pour une fréquence donnée (selon l'horizon souhaité, on pourra considérer des rentabilités journalières, hebdomadaires, mensuelles...). Appelons F_r la fonction de répartition associée à la variable aléatoire r et (l, u) le support de la fonction de densité. Considérons r_1, r_2, \dots, r_n , n variables aléatoires mesurant l'événement aux instants $1, 2, \dots, n$; les extrêmes sont définis comme les maxima et les minima de ces n variables aléatoires. Le maximum noté Y_n correspond à la plus haute rentabilité observée sur les périodes $1, 2, \dots, n$; de même, le minimum, Z_n , correspond à la plus basse rentabilité ⁵. Si les variables parentes r_1, r_2, \dots, r_n sont statistiquement indépendantes et de même loi (hypothèse de la marche aléatoire), la loi exacte du maximum notée F_{Y_n} évaluée au point x s'exprime simplement en fonction de la loi de la variable parente F_r :

$$(3) \quad F_{Y_n}(x) = [F_r(x)]^n.$$

La loi du maximum dépend essentiellement des propriétés de la loi de la variable parente pour de grandes valeurs de x . En effet, pour de faibles valeurs de x , l'influence de $F_r(x)$ décroît rapidement avec n . De la formule (3), on déduit que la loi limite de Y_n , obtenue en faisant tendre n vers l'infini, est nulle pour les valeurs de x inférieures à la borne supérieure du support de la loi de r, u , et égale à l'unité pour les valeurs de x plus grandes que u . C'est donc une loi dégénérée.

En pratique, la loi de la variable parente (la rentabilité calculée pour une fréquence donnée comme la journée, la semaine ou le mois) n'est pas connue avec précision. En effet, il n'existe ni théorie statistique, ni théorie financière, ni modèle économique qui spécifie la loi statistique des rentabilités. De ce fait, si cette loi n'est pas connue, la loi exacte du maximum ne l'est pas non plus. Les formules exactes de la loi du maximum et de sa loi limite ne sont donc pas très intéressantes. Pour cette raison, le comportement asymptotique du maximum Y_n est étudié.

4. Les résultats du théorème de base (cas i.i.d.) se trouvent dans l'article de GNEDENKO [1943]. Le livre de LEADBETTER, LINDGREN et ROOTZÉN [1983] rassemble les principales extensions du théorème de base aux processus. L'excellent livre de Gumbel [1958] insiste sur le traitement statistique du sujet et donne de nombreuses applications pratiques (dimensionnement des ouvrages d'art, résistance des matériaux, météorologie...); un ouvrage plus récent est celui de EMBRECHTS, KLÜPPELBERG et MIKOSCH [1997]. Un exposé très clair en français peut être trouvé dans JACOB [1989]. LONGIN [1995a] traite des applications en finance.

5. Dans la suite de cette partie, les résultats théoriques ne sont présentés que pour le maximum puisque les résultats pour le minimum peuvent être obtenus directement à partir de ceux du maximum en utilisant la formule suivante : $Z_n(r) \equiv \text{Min}(r_1, r_2, \dots, r_n) = -\text{Max}(-r_1, -r_2, \dots, -r_n) = -Y_n(-r)$.

2.2. Un résultat limite : le théorème des valeurs extrêmes

TIAGO de OLIVEIRA [1973] a écrit : « *Puisque, en général, nous avons des échantillons suffisamment larges, il est naturel et en général suffisant pour des raisons pratiques de trouver des lois limites pour le maximum ou le minimum convenablement réduits et de les utiliser.* » Pour trouver une loi limite d'intérêt, la variable aléatoire Y_n est transformée de telle sorte que la loi limite de la nouvelle variable ne soit pas dégénérée. La transformation la plus simple est l'opération de standardisation. La variable Y_n est ajustée avec un paramètre d'échelle α_n (supposé positif) et un paramètre de localisation β_n . Dans le reste de l'étude, l'existence d'une séquence de tels coefficients $(\alpha_n > 0, \beta_n)$ est supposée. Le théorème des valeurs extrêmes spécifie la forme de la loi limite lorsque la variable n tend vers l'infini. Bien que le résultat du théorème reste vrai sous des hypothèses moins restrictives (cf sous-partie 1.3), le théorème de base peut être obtenu à partir des quatre hypothèses suivantes :

H1. Les variables r_1, r_2, \dots, r_n sont des variables aléatoires.

H2. Les variables r_1, r_2, \dots, r_n sont statistiquement indépendantes.

H3. Les variables r_1, r_2, \dots, r_n sont tirées de la même loi.

H4. Il existe une séquence de coefficients de standardisation $(\alpha_n > 0, \beta_n)$ tels que la loi limite F_Y de la variable réduite $(Y_n - \beta_n)/\alpha_n$ ne soit pas dégénérée.

Le théorème des valeurs extrêmes exposé dans sa version finale par GNEDENKO [1943] donne la forme de la loi limite F_Y dont l'expression la plus générale est due à JENKINSON [1955]:

$$(4) \quad F_Y(y) = \exp[-(1 - \tau \cdot y)^{\frac{1}{\tau}}] < \begin{array}{l} \text{pour } y > \tau^{-1} \text{ si } \tau < 0 \\ \text{pour } y < \tau^{-1} \text{ si } \tau > 0. \end{array}$$

Selon la valeur du paramètre τ appelé indice de queue, la loi des extrêmes peut être réécrite comme suit :

– *Loi de Gumbel (type I)*

$$(5) \quad F_Y(y) = \exp(-e^{-y}) \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}.$$

– *Loi de Fréchet (type II)*

$$(6) \quad F_Y(y) = < \begin{array}{l} 0 \quad \text{pour } y \leq 0 \\ \exp(-y^{-k}) \quad \text{pour } y > 0 (k > 0). \end{array}$$

– *Loi de Weibull (type III)*

$$(7) \quad F_Y(y) = < \begin{array}{l} \exp(-(-y)^{-k}) \quad \text{pour } y < 0 (k < 0) \\ 1 \quad \text{pour } y \geq 0. \end{array}$$

L'indice de queue τ détermine le type de loi : $\tau < 0$ correspond au type II, $\tau > 0$ au type III, et le cas limite $\tau = 0$ correspond au type I, $(1 - \tau \cdot y)^{1/\tau}$ étant interprété comme e^{-y} . La loi de Gumbel peut être considérée comme une loi de transition entre les lois de Fréchet et de Weibull.

Le paramètre k , appelé paramètre de forme, reflète le poids de la queue de la distribution de la variable parente. L'indice de queue et le paramètre

de forme sont liés par la formule : $\tau = -1/k$. La queue de la distribution F_r est, soit décroissante de façon exponentielle (type I), soit décroissante comme une fonction puissance (type II), soit bornée (type III). Dans le premier et le troisième cas, tous les moments de la loi de r sont définis. Dans le deuxième cas, la loi de r présente des queues épaisses (*fat-tailed distribution* en anglais) et le paramètre de forme k est égal à l'ordre du moment maximal. Les moments d'ordre j plus grands que k sont infinis et les moments d'ordre j plus petits que k sont finis. Par exemple, si k est plus grand que l'unité, alors la moyenne des rentabilités existe; si k est plus grand que deux, alors la variance est finie, si k est plus grand que trois, alors la skewness est définie et ainsi de suite. Plus la valeur du paramètre k est petite, plus la queue de la distribution de la variable r est épaisse. Le paramètre de forme est un paramètre intrinsèque du processus de rentabilités et ne dépend pas du nombre de rentabilités parmi lesquelles la rentabilité maximale est sélectionnée. Les paramètres d'échelle α_n et de localisation β_n dépendent de la longueur de la période de sélection, n , et représentent respectivement la dispersion et la taille « moyenne » du maximum (le paramètre de localisation tend de façon asymptotique vers la valeur modale de la distribution) ⁶. Le paramètre de forme k et les coefficients de standardisation α_n et β_n peuvent être différents pour les lois du maximum et du minimum.

Un résultat de FELLER [1971] caractérise aussi la loi des extrêmes d'une somme finie de variables de base ⁷. La loi des extrêmes de la variable de base et les lois des extrêmes de sommes finies de variables de base sont de même type avec une même valeur d'indice de queue τ . Les coefficients de standardisation α_n et β_n peuvent cependant être différents.

Le théorème des valeurs extrêmes donne un résultat intéressant car général : quelle que soit la loi de la variable parente, la loi limite des extrêmes a toujours la même forme. Les lois des extrêmes pour deux processus parents différents ne se différencient que par les valeurs de l'indice de queue et des paramètres d'échelle et de localisation.

2.3. Extensions du théorème de base

Le même résultat concernant la forme de la loi est obtenu si l'on relâche les hypothèses d'indépendance et d'identité de la loi dont sont tirées les variables. Citons quelques unes des extensions du théorème. BERMAN [1964] montre que le résultat tient toujours si les variables sont corrélées, la série des coefficients de corrélation au carré étant convergente. Comme expliqué dans LONGIN [1997a], la volatilité des rentabilités et des taux (modélisée

6. Le théorème des valeurs extrêmes étant un théorème limite, il n'y a pas unicité de la séquence des coefficients de standardisation (α_n, β_n) . Les séquences possibles doivent cependant vérifier certaines propriétés. En pratique, nous estimons la séquence qui vérifie un certain critère (la maximisation de la vraisemblance du modèle par exemple).

7. En finance, étudier la somme de rentabilités (logarithmiques) revient à étudier le phénomène d'agrégation temporel. Par exemple, la somme des cinq rentabilités journalières d'une semaine correspond à la rentabilité hebdomadaire.

avec les processus de type ARCH) est influencée par les extrêmes; DE HAAN, RESNICK, ROOTZÈN et DE VRIES [1989] montrent que si le processus suivi par la rentabilité r est un processus ARCH, alors la variable Y_n est du type II, l'indice de queue vérifiant : $-0,5 < \tau < 0$. D'après LEADBETTER, LINDGREN et ROOTZÈN [1983], un mélange de variables normales en nombre fini produit une loi limite du type I. Ces extensions montrent que les hypothèses d'indépendance et d'identité de la loi parente ne sont pas cruciales.

Notons enfin les similarités entre le théorème des valeurs extrêmes exposé ci-dessus et un théorème beaucoup plus connu : le théorème central limite. Ce dernier s'intéresse au comportement de la somme S_n des n variables aléatoires r_1, r_2, \dots, r_n du processus, définie par : $S_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n$, alors que le théorème des valeurs extrêmes s'intéresse au maximum et au minimum du processus. Les deux théorèmes sont asymptotiques par nature dans le sens où ils considèrent le comportement des variables standardisées quand le paramètre n tend vers l'infini. Les deux théorèmes s'appuient aussi sur les mêmes hypothèses et donnent des résultats similaires : la loi limite de la variable standardisée qui est la loi normale ou une loi de Pareto Lévy dans le cas du théorème central limite, et la loi de Gumbel, la loi de Fréchet ou la loi de Weibull dans le cas du théorème des valeurs extrêmes.

2.4. Applications (non-financières) de la théorie des valeurs extrêmes

La théorie a été appliquée précédemment dans de nombreux domaines : citons les inondations causées par les grandes crues de fleuves (GUMBEL [1941]), la résistance des matériaux soumis à de grandes contraintes (EPSTEIN et SOBEL [1953]), la construction des bâtiments dans les pays tropicaux soumis à des vents extrêmes dus aux cyclones (DELAUNAY [1986]) ou encore les primes d'assurances suite à de grands sinistres (EMBRECHTS [1997]).

3 Calcul de la VaR à partir de la loi asymptotique des rentabilités extrêmes

Cette partie montre comment la théorie des valeurs extrêmes peut être utilisée pour calculer la VaR d'une position ⁸.

8. Le problème du traitement des valeurs extrêmes dans le calcul de la VaR a été reconnu depuis longtemps (RISK 1995). Un essai de formalisation peut être trouvé dans BOUDOUKH, RICHARDSON et WHITELAW [1995] qui introduisent le concept de *worst case scenario risk* qui représente le risque associé au pire des scénarios et dans DIMSON et MARSH [1995] qui considèrent les pires réalisations de la valeur de portefeuille pour évaluer le risque d'une position.

3.1. Description de la méthode des valeurs extrêmes pour le calcul de la VaR ⁹

La méthode est schématisée par l'organigramme de la figure 1.

Chaque étape est détaillée ci-dessous :

- *Étape 1* : choix de la fréquence des rentabilités (f). Les autorités réglementaires comme le Comité de Bâle ou la Commission Européenne préconisent une fréquence de dix jours ¹⁰. La fréquence est reliée à l'horizon que l'on se fixe pour évaluer le risque catastrophe de faillite; le choix de la fréquence est en général guidé par deux caractéristiques : le degré de liquidité des titres du portefeuille et le degré de stabilité de la composition du portefeuille. Pour une position liquide, des rentabilités de haute fréquence comme des rentabilités journalières peuvent être retenues puisque les actifs peuvent être vendus rapidement dans des conditions de marché relativement bonnes. Pour une position peu liquide, des rentabilités de basse fréquence comme des rentabilités hebdomadaires, bihebdomadaires ou mêmes mensuelles sont préférables puisque le temps pour se défaire des titres dans des conditions satisfaisantes est plus long. Pour une position dont la composition évolue rapidement sur la période considérée, une basse fréquence est inadéquate puisque la composition peut être complètement différente au début et à la fin de la période d'observation; dans ce cas, il est préférable de retenir une fréquence élevée afin d'évaluer la variation de valeur d'une position qui reste relativement stable dans le temps. En pratique, pour des positions peu homogènes, le choix de la fréquence est le résultat d'un compromis.

- *Étape 2* : saisie de l'historique de rentabilités de la position (r_t). Nous traitons ici le cas d'une position agrégée et nous nous plaçons donc dans un cadre univarié ¹¹.

- *Étape 3* : choix de la longueur de la période de sélection des rentabilités extrêmes (T). Pour une fréquence donnée, il s'agit de déterminer la longueur de la période de sélection des rentabilités extrêmes, notée T , ou encore le nombre de rentabilités de bases (n) à partir desquelles sont extraites les rentabilités extrêmes. Les deux paramètres T et n sont reliés par la relation $T = n \cdot f$. La période de sélection devrait satisfaire une contrainte d'ordre statistique : il faut que la période de sélection soit assez longue pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs extrêmes. Le résultat du théorème étant un résultat limite, il faut que les rentabilités extrêmes soient sélectionnées

9. La méthode des valeurs extrêmes utilisant la loi asymptotique estimée des rentabilités extrêmes donnée par la théorie permet la mise en oeuvre pratique de l'approche des valeurs extrêmes.

Une autre méthode consiste à utiliser la loi historique des rentabilités extrêmes observées.

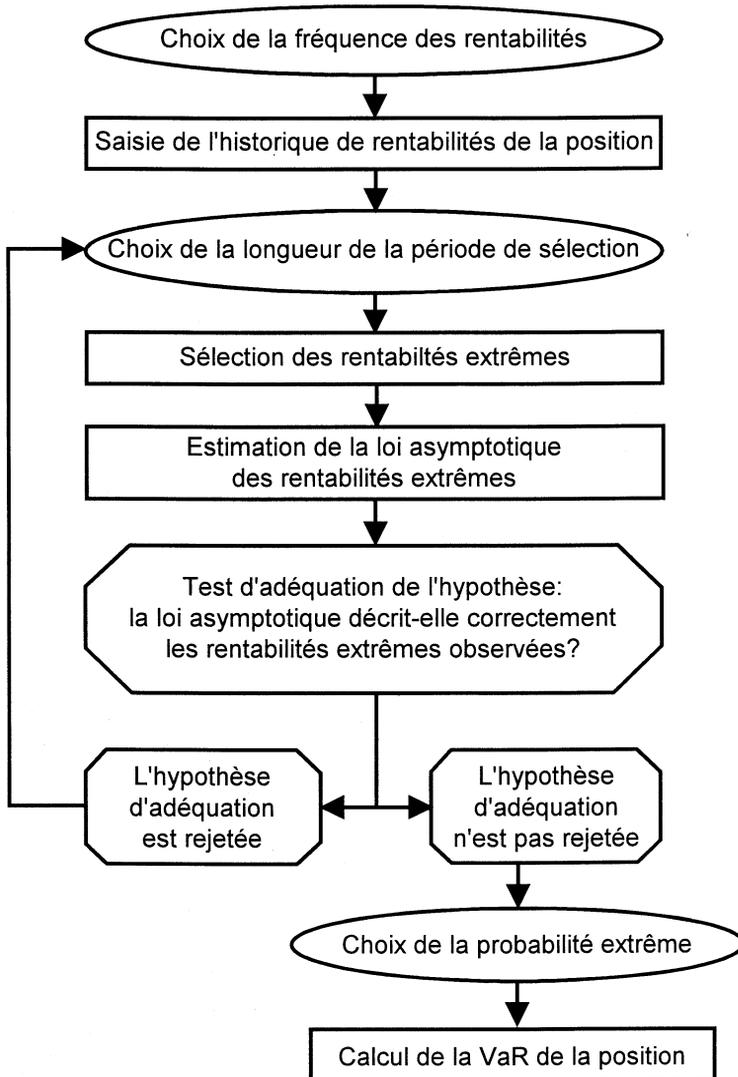
10. Une fréquence plus élevée peut être utilisée à condition de multiplier la VaR obtenue par un certain coefficient (égal à $\sqrt{10}$ pour une fréquence journalière par exemple).

11. Une démarche alternative consisterait à se placer dans un cadre multivarié pour étudier les facteurs de risque sur lesquels la position peut se décomposer. Cependant, le risque d'une position n'est pas toujours relié aux queues des distributions des facteurs de risque. Par exemple, comme nombre de praticiens l'on déjà fait remarqué, le risque d'un *straddle* (combinaison d'un *call* et d'un *put* sur le même sous-jacent avec le même prix d'exercice et la même date d'expiration) est associé au centre de la distribution du sous-jacent.

FIGURE 1

Organigramme de la méthode des valeurs extrêmes pour calculer la VaR d'une position.

Ce schéma reprend les huit étapes de notre méthode : (1) choix de la fréquence des rentabilités f ; (2) saisie de l'historique de rentabilités de la position r_t ; (3) choix de la longueur de la période de sélection des rentabilités extrêmes T (ou n); (4) sélection des rentabilités extrêmes positives Y_n ou négatives Z_n ; (5) estimation des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités extrêmes positives α_n^{\max} , β_n^{\max} et τ^{\max} ou négatives α_n^{\min} , β_n^{\min} et τ^{\min} ; (6) test d'adéquation de Sherman de la loi asymptotique estimée aux extrêmes observés; (7) choix de la valeur de la probabilité extrême p^{ext} ; et (8) calcul de la VaR de la position.



sur des périodes suffisamment longues pour pouvoir remplacer en toute sécurité la loi exacte par la loi asymptotique.

• *Étape 4* : sélection des rentabilités extrêmes positives (Y_n) et négatives (Z_n). La base de données est découpée en sous-périodes ne se chevauchant pas et comprenant chacune n observations de rentabilités de fréquence f ¹². Sur chaque sous-période, la rentabilité extrême est sélectionnée¹³. Si l'on considère une position agrégée, seul l'extrême négatif présente un intérêt puisque les pertes sont concentrées dans la queue gauche de la distribution. Si l'on considère les facteurs de risque sur lesquels la position peut être décomposée, les deux types d'extrême présentent un intérêt : les extrêmes négatifs pour une position longue et les extrêmes positifs pour une position courte. Si la base de données comprend N^{obs} observations de rentabilités, le nombre d'observations de rentabilités extrêmes N est égal à la partie entière de N^{obs}/n . On obtient donc deux séries d'extrêmes $(Y_{n,i})_{i=1,N}$ et $(Z_{n,i})_{i=1,N}$. Sur la figure 2, la procédure de sélection est illustrée dans le cas de l'indice SBF 240 du marché boursier français (base de données AFFI) pour les rentabilités journalières ($f = 1$) maximale et minimale sélectionnées sur un trimestre ($T = 63$ et de façon équivalente $n = 63$). Comme les rentabilités extrêmes sélectionnées peuvent être obtenues lors de périodes usuelles correspondant au fonctionnement normal du marché et lors de périodes agitées correspondant aux crises financières, nous retenons donc à la fois les petites secousses et les tremblements de terre des marchés financiers.

• *Étape 5* : estimation des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités extrêmes (α_n, β_n et τ). Il s'agit d'estimer les trois paramètres de la loi asymptotique du maximum ($\alpha_n^{\text{max}}, \beta_n^{\text{max}}$ et τ^{max}) et du minimum ($\alpha_n^{\text{min}}, \beta_n^{\text{min}}$ et τ^{min}) à partir des N rentabilités extrêmes sélectionnées précédemment. La méthode du maximum de vraisemblance donne des estimations asymptotiquement sans biais et de variance minimale¹⁴.

• *Étape 6* : test d'adéquation de Sherman. Il s'agit de tester si la loi asymptotique des rentabilités extrêmes estimée à l'étape précédente décrit convenablement le comportement statistique des rentabilités extrêmes observées. SHERMAN [1957] propose un test fondé sur la comparaison des distributions estimée et observée¹⁵. Le test utilise la série des rentabilités extrêmes ordonnées. Par exemple, pour le maximum, la série des maxima ordonnés notée $(Y'_{n,i})_{i=1,N}$ vérifie : $Y'_{n,1} \leq Y'_{n,2} \leq \dots \leq Y'_{n,N}$. On calcule

12. Comme suggéré par l'un des arbitres, une alternative serait de sélectionner les extrêmes sur des périodes glissantes qui se chevaucheraient; une telle méthode utiliserait un nombre plus élevé d'observations extrêmes (il faudrait alors tenir compte de la corrélation entre les observations extrêmes de l'échantillon dans l'estimation des paramètres).

13. Alors que les méthodes de l'approche traditionnelle considèrent l'information contenue dans toute la distribution, la méthode que nous proposons ne prend en compte que l'information pertinente pour le problème traité : les extrêmes positifs contenus dans la queue droite pour une position courte et les extrêmes négatifs contenus dans la queue gauche pour une position longue. Cette propriété est soulignée dans ARTZNER *et al.* [1996].

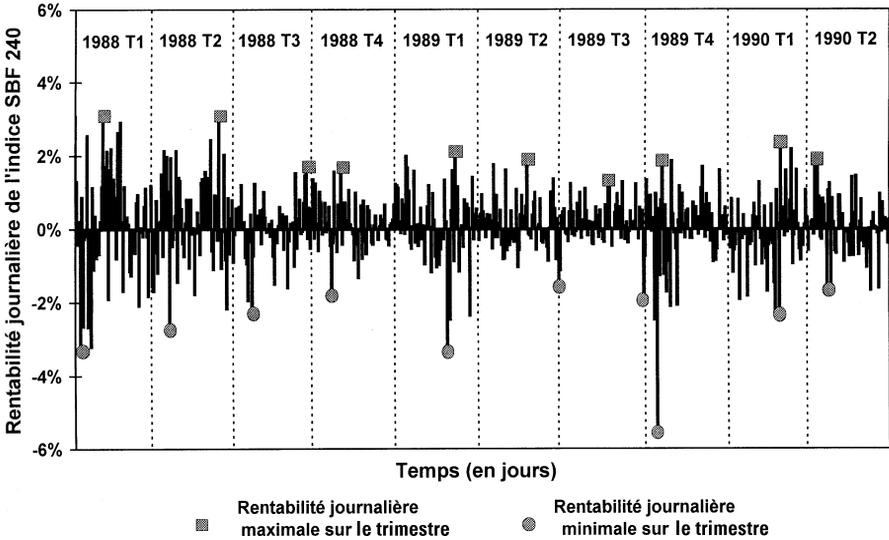
14. Voir LONGIN [1996a] pour une présentation des différentes méthodes d'estimation.

15. Le test de Sherman présente de bonnes propriétés pour des échantillons de petite taille comme il converge rapidement vers la normalité. Il est aussi plus approprié que le test classique du chi-deux puisqu'il ne requiert pas la partition arbitraire des données (GUMBEL [1958], p. 38).

FIGURE 2

Sélection des rentabilités extrêmes.

Les rentabilités maximales (marquées d'un carré) et minimales (marquées d'un cercle) sont sélectionnées sur des périodes trimestrielles à partir d'observations de rentabilités journalières de l'indice SBF 240 sur la période janvier 1988-juin 1990 (base de données AFFI). L'exemple correspond aux valeurs de paramètres suivantes : $N^{obs} = 634$, $f = 1$, $T = 63$, $n = 63$ et $N = 10$. Les rentabilités extrêmes sélectionnées correspondent parfois à des tremblements de terre comme la plus forte chute journalière de l'indice pendant le dernier trimestre de l'année 1989 de $-5,55\%$ correspondant au mini-krach boursier d'Octobre mais le plus souvent à des petites secousses comme les plus fortes chutes sur les deux premiers trimestres de l'année 1990 respectivement de $-2,20\%$ et $-1,69\%$.



ensuite la statistique

$$\Omega_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \left| F_{Y,n}(Y'_{n,i+1}) - F_{Y,n}(Y'_{n,i}) - \frac{1}{N+1} \right|$$

avec $F_{Y,n}(Y'_{n,0}) = 0$ et $F_{Y,n}(Y'_{n,N+1}) = 1$.

La variable Ω_N est asymptotiquement distribuée comme une loi normale de moyenne $(N/(N+1))^{N+1}$ et de variance approchée $(2e-5)/(e^2/N)$ où e est l'élément de Neper ($\approx 2,718$). Une faible valeur pour Ω_N indiquera que les distributions estimée et observée sont proches l'une de l'autre et que le comportement des extrêmes est bien décrit par la théorie. Au contraire, une valeur élevée pour Ω_N indiquera que les distributions estimée et observée sont éloignées l'une de l'autre et que la théorie ne convient pas. La valeur de Ω_N est comparée à une valeur seuil associée à un niveau de confiance donné (5% par exemple). Si la valeur de la statistique Ω_N est supérieure au seuil fixé, l'hypothèse d'adéquation est rejetée. Le rejet

peut être expliqué par le fait que les extrêmes retenus ont été sélectionnés sur des périodes trop courtes, en d'autres termes, le nombre de rentabilités de base à partir des quelles les rentabilités extrêmes sont extraites n'est pas assez élevé. La théorie des valeurs extrêmes est, en effet, une théorie asymptotique, et nécessite de travailler avec un grand nombre d'observations afin d'être suffisamment proche de la limite. Si l'hypothèse d'adéquation est rejetée, il faut alors revenir à la troisième étape et choisir une période de sélection plus longue. Si la valeur de la statistique Ω_N est inférieure au seuil fixé, l'hypothèse d'adéquation n'est pas rejetée et l'on peut passer à l'étape suivante.

• *Étape 7* : choix de la valeur de la probabilité extrême (p^{ext}). Les méthodes de l'approche traditionnelle se donnent la probabilité d'un mouvement défavorable des prix de marché pendant une journée ou pendant une période donnée¹⁶, puis déduisent le montant à risque correspondant à l'aide d'un modèle statistique. Par exemple, la VaR calculée par RiskMetricsTM correspond à la probabilité d'observer un mouvement défavorable quotidien. Dans RiskMetricsTM, le lien entre la probabilité et la VaR est réalisé grâce à la loi normale. Dans la méthode exposée dans cet article, nous n'utilisons pas cette définition usuelle pour la probabilité. La raison en est simple : nous ne connaissons pas de modèle ayant un fondement théorique (d'ordre statistique, financier ou économique) qui permette de faire le lien entre cette probabilité et la VaR¹⁷. Nous utilisons une probabilité qualifiée d'extrême notée p^{ext} relative au pire mouvement défavorable de fréquence donnée observé sur une longue période : par exemple, pour une position courte, la probabilité pour que la rentabilité journalière maximale observée sur un trimestre soit en dessous d'un certain seuil (la valeur du seuil pour une valeur de probabilité fixée nous donnant la valeur de la VaR de la position¹⁸). Les probabilités usuelle p et extrême p^{ext} sont reliées par la formule : $p^{\text{ext}} = p^n$ (formule (3) exprimée en terme de probabilités)¹⁹. Notre choix de la définition de la probabilité est guidé par les résultats statistiques sur les extrêmes présentés précédemment. Le théorème des valeurs extrêmes montre en effet que le lien entre cette probabilité et la VaR peut être calculée et estimée avec précision. Le fondement théorique de la

16. Par exemple, la valeur de la probabilité retenue par quelques grandes banques sont : 99% pour Bankers Trust (sur une année), 97,5% pour Chemical Bank et Chase Manhattan et 95% pour Bank America et JP Morgan (sur un jour), alors que la dernière proposition du Comité de Bâle [1995] préconise une probabilité de 99% sur une période de 10 jours.

17. Avec une méthode de l'approche traditionnelle, le lien entre la VaR notée $\text{VaR}(F_r, p)$ et la probabilité usuelle p est donné par la formule suivante : $\text{VaR}(F_r, p) = F_r^{-1}(p)$.

18. Avec la méthode des valeurs extrêmes, le lien entre la VaR notée $\text{VaR}(F_{Y_n}^{\text{asympt}}, p^{\text{ext}})$ et la probabilité extrême p^{ext} est donné par la formule : $\text{VaR}(F_{Y_n}^{\text{asympt}}, p^{\text{ext}}) = F_{Y_n}^{\text{asympt}-1}(p^{\text{ext}})$.

19. Quand la distribution des rentabilités, F_r , est connue, l'approche des valeurs extrêmes est équivalente à l'approche traditionnelle. Notons formellement $\text{VaR}(F_r, p)$ la VaR obtenue classiquement à partir de la distribution des rentabilités et de la probabilité usuelle p et $\text{VaR}(F_{Y_n}, p^{\text{ext}})$ la VaR obtenue à partir de la distribution (exacte) des rentabilités extrêmes et de la probabilité extrême p^{ext} . En supposant $p^{\text{ext}} = p^n$, nous obtenons en utilisant la formule (3) : $\text{VaR}(F_r, p) = \text{VaR}(F_{Y_n}, p^{\text{ext}})$. L'utilité de la méthode des valeurs extrêmes provient bien sûr du fait que l'on ne connaît pas en réalité la distribution F_r mais que l'on peut connaître en l'estimant la distribution (asymptotique) des valeurs extrêmes. La VaR calculée par la méthode des valeurs extrêmes peut être notée $\text{VaR}(F_{Y_n}^{\text{asympt}}, p^{\text{ext}})$.

méthode est fort, puisque la loi asymptotique des extrêmes est compatible avec de nombreuses lois et classes de processus utilisées pour décrire le comportement des rentabilités.

Le choix de la valeur de la probabilité extrême est arbitraire (comme l'est d'ailleurs le choix de la valeur de la probabilité usuelle dans les méthodes de l'approche traditionnelle). Cependant, plusieurs considérations peuvent nous guider : les contraintes imposées par la réglementation (par exemple, la valeur pour la probabilité usuelle p de 0,99 préconisée par le Comité de Bâle implique une valeur pour la probabilité extrême p^{ext} de 0,99ⁿ), le degré de risque souhaité par les actionnaires, le souci de simplicité et de présentation vis-à-vis de la Direction Générale ou du Comité de Gestion des Risques (par exemple, la VaR calculée avec une probabilité extrême valant 95% et des rentabilités extrêmes sélectionnées sur des semestres correspond au choc décanal souvent cité comme référence dans les banques ²⁰).

• *Étape 8* : calcul de la VaR de la position. La dernière étape consiste à calculer la VaR de la position à l'aide de la loi asymptotique estimée précédemment. Le modèle complet pour traiter des positions à la fois courtes et longues comprend neuf paramètres : la fréquence et le nombre de rentabilités de base à partir desquelles sont sélectionnées les extrêmes (paramètres notés f et n), les trois paramètres de la loi asymptotique des rentabilités maximales pour traiter le cas d'une position courte ($\alpha_n^{\text{max}}, \beta_n^{\text{max}}$ et τ^{max}), les trois paramètres de la loi asymptotique des rentabilités minimales pour traiter le cas d'une position longue ($\alpha_n^{\text{min}}, \beta_n^{\text{min}}$ et τ^{min}) et la valeur de la probabilité extrême.

Pour une position courte, la valeur de la VaR notée $\text{VaR}^{\text{courte}}$ exprimée en pourcentage du montant de la position est obtenue à l'aide de la loi asymptotique des rentabilités maximales déterminée par les trois paramètres $\alpha_n^{\text{max}}, \beta_n^{\text{max}}$ et τ^{max} :

$$(8) \quad \text{Prob}(Y_n \leq \text{VaR}^{\text{courte}}) = p^{\text{ext}} = \exp \left[- \left(1 - \tau^{\text{max}} \cdot \left(\frac{\text{VaR}^{\text{courte}} - \beta_n^{\text{max}}}{\alpha_n^{\text{max}}} \right)^{\frac{1}{\tau^{\text{max}}}} \right) \right],$$

impliquant

$$(9) \quad \text{VaR}^{\text{courte}} = \beta_n^{\text{max}} + \frac{\alpha_n^{\text{max}}}{\tau^{\text{max}}} \cdot [1 - (-\ln(p^{\text{ext}}))^{\tau^{\text{max}}}].$$

Pour une position longue, la valeur de la VaR notée $\text{VaR}^{\text{longue}}$ mesurée positivement et exprimée en pourcentage du montant de la position est obtenue à l'aide de la loi asymptotique des rentabilités minimales déterminées par les trois paramètres $\alpha_n^{\text{min}}, \beta_n^{\text{min}}$ et τ^{min} :

$$(10) \quad \text{Prob}(Z_n \geq -\text{VaR}^{\text{longue}}) = p^{\text{ext}} = \exp \left[- \left(1 - \tau^{\text{min}} \cdot \left(\frac{\beta_n^{\text{min}} + \text{VaR}^{\text{longue}}}{\alpha_n^{\text{min}}} \right)^{\frac{1}{\tau^{\text{min}}}} \right) \right],$$

20. BOULIER, DALAUD et LONGIN [1998] discutent de façon détaillée le concept de période de retour qui est sous-jacent au raisonnement.

impliquant

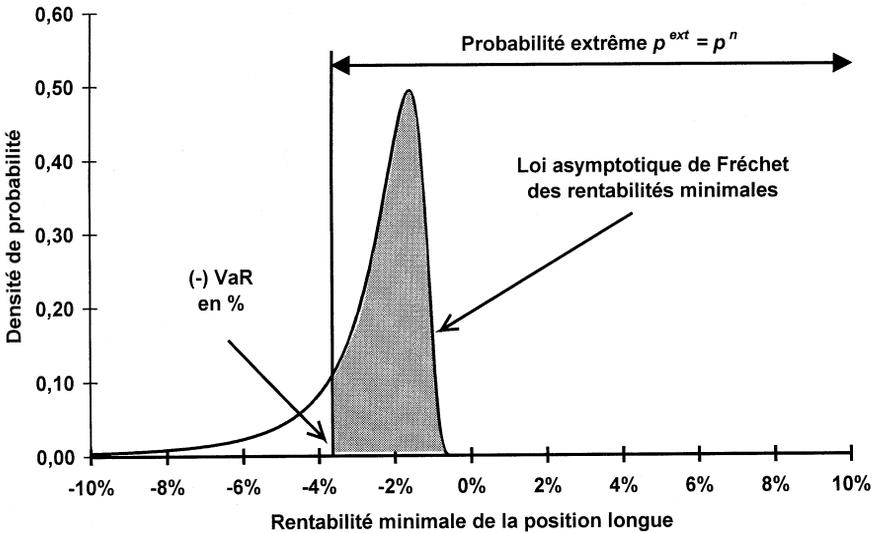
$$(11) \quad \text{VaR}^{\text{longue}} = -\beta_n^{\text{min}} + \frac{\alpha_n^{\text{min}}}{\tau_n^{\text{min}}} \cdot [1 - \langle -\ln(p^{\text{ext}}) \rangle^{\tau_n^{\text{min}}}]$$

La relation entre la probabilité p^{ext} et la VaR est représentée sur la figure 3.

FIGURE 3

Calcul de la VaR d'après la méthode des valeurs extrêmes.

Cette figure illustre graphiquement le calcul de la VaR pour une position longue. L'aire de la surface grisée comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de densité de la loi de Fréchet des rentabilités minimales et d'une droite verticale coupant l'axe au point d'abscisse - VaR correspond graphiquement à la valeur de la probabilité extrême p^{ext} . Mathématiquement, la VaR est égale à l'inverse de la fonction de répartition de la loi de Fréchet évaluée en p^{ext} .



3.2. Exemple d'application

La méthode présentée ci-dessus est appliquée au calcul de la VaR d'une position longue et d'une position courte sur le marché boursier français représenté par l'indice SBF 240 (base de données AFFI sur la période janvier 1997-juin 1990)²¹. Les résultats d'estimation de la loi asymptotique des extrêmes sont présentés dans un premier temps; une attention toute particulière est portée sur le choix de la longueur de la période de sélection et de la fréquence des rentabilités. Des VaRs sont ensuite calculées pour différentes valeurs de probabilités extrêmes.

21. HAMON et JACQUILLAT [1992] donnent une présentation détaillée de la base de données de l'AFFI et des résultats empiriques sur le marché boursier français.

3.2.1. Estimation de la loi asymptotique des rentabilités extrêmes

Les tableaux 1A et 1B donnent les estimations des trois paramètres des lois asymptotiques des rentabilités journalières ($f = 1$) minimales et maximales observées sur des périodes de longueur allant d'une semaine ($T = 5$) à un trimestre ($T = 63$). Commentons les résultats pour les rentabilités minimales : le paramètre d'échelle croît de 0,451 à 0,796, indiquant que les extrêmes négatifs sont de plus en plus dispersés; le paramètre de localisation croît en valeur absolue de 0,456 à 1,856, montrant

TABLEAU 1

Estimation des lois asymptotiques de rentabilités journalières extrêmes de l'indice SBF 240.

A. rentabilités journalières minimales

Période de sélection	Paramètre d'échelle α_n	Paramètre de localisation β_n	Indice de queue τ	Test d'adéquation de Sherman
une semaine ($T = 5, N = 660$)	0,451 (0,016)	-0,456 (0,027)	-0,283 (0,031)	5,236 [0,000]
deux semaines ($T = 10, N = 330$)	0,597 (0,030)	-0,802 (0,037)	-0,224 (0,046)	0,572 [0,284]
un mois ($T = 21, N = 157$)	0,631 (0,049)	-1,170 (0,058)	-0,309 (0,076)	1,287 [0,099]
un trimestre ($T = 63, N = 52$)	0,796 (0,121)	-1,856 (0,136)	-0,386 (0,174)	0,438 [0,331]

B. rentabilités journalières maximales

Période de sélection	Paramètre d'échelle α_n	Paramètre de localisation β_n	Indice de queue τ	Test d'adéquation de Sherman
une semaine ($T = 5, N = 660$)	0,479 (0,023)	0,658 (0,024)	-0,189 (0,031)	6,830 [0,000]
deux semaines ($T = 10, N = 330$)	0,535 (0,022)	1,012 (0,039)	-0,133 (0,036)	0,944 [0,173]
un mois ($T = 21, N = 157$)	0,561 (0,039)	1,345 (0,051)	-0,165 (0,063)	-0,174 [0,569]
un trimestre ($T = 63, N = 52$)	0,664 (0,082)	1,887 (0,103)	-0,212 (0,108)	0,568 [0,285]

Note: ces deux tableaux donnent les estimations du maximum de vraisemblance des trois paramètres des lois asymptotiques des rentabilités journalières extrêmes (avec les écarts-types entre parenthèses). Les rentabilités journalières ($f = 1$) extrêmes sont sélectionnées sur des périodes ne se recouvrant pas allant d'une semaine ($T = 5$) à un trimestre ($T = 63$). Une rentabilité minimale (maximale) correspond à la plus forte chute (hausse) du marché boursier français représenté par l'indice SBF 240 (base de données AFFI sur la période janvier 1977-juin 1990). La dernière colonne indique le résultat du test d'adéquation de Sherman pour vérifier si la loi asymptotique décrit correctement le comportement des rentabilités extrêmes (avec la probabilité de dépassement entre crochets).

que la taille « moyenne » des extrêmes négatifs est de plus en plus grande; l'indice de queue est stable, sa valeur est négative et varie entre $-0,224$ et $-0,386$ sans différence significative, impliquant que la loi limite est une loi de Fréchet ²². En d'autres termes, la loi asymptotique des rentabilités minimales s'étend en se déplaçant vers la gauche, tandis que la décroissance de la queue gauche reste identique. Le test de Sherman indique que l'hypothèse d'adéquation n'est pas rejetée au seuil de 5% pour des valeurs de T supérieures à 10. On peut donc remplacer la loi exacte des rentabilités minimales par la loi asymptotique lorsque celles-ci sont sélectionnées sur des périodes de longueur supérieure à deux semaines. Des commentaires similaires s'appliquent aux rentabilités maximales.

Les huit lois estimées sont représentées sur la figure 4. La figure semble indiquer une certaine symétrie entre les lois des minima et des maxima. L'hypothèse de l'égalité de leurs paramètres définie pour chaque paramètre par $\alpha_n^{\min} = \alpha_n^{\max}$, $\beta_n^{\min} = \beta_n^{\max}$ et $\tau^{\min} = \tau^{\max}$ est rejetée au seuil de 5% une fois sur quatre pour α_n deux fois sur quatre pour β_n et une fois sur quatre pour τ . L'hypothèse d'égalité est le plus souvent rejetée pour les périodes de sélection longues ($T = 21$ et $T = 63$) pour des raisons en partie liées à la détérioration de la qualité des estimations (pour de grandes valeurs de T , comme nous disposons d'un nombre moins élevé d'observations d'extrêmes, les écarts-types des estimations sont plus élevés et il est donc plus difficile de rejeter l'hypothèse nulle d'égalité des coefficients).

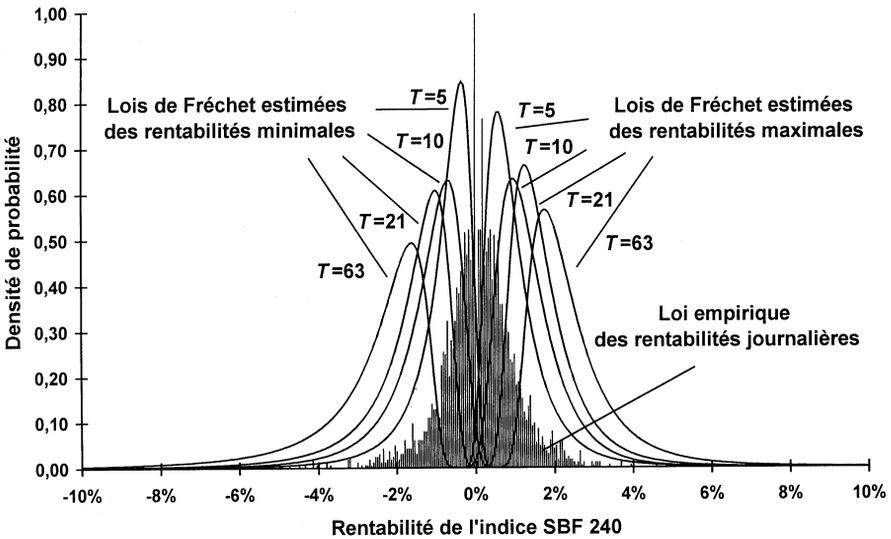
Les lois asymptotiques des rentabilités extrêmes sont aussi estimées pour des fréquences différentes des rentabilités de base : fréquences journalière, hebdomadaire et bimensuelle ($f = 1, 5$ et 10). La longueur de la période de sélection est prise égale à un trimestre ($T = 63$) pour toutes les fréquences. Ainsi, toutes les distributions sont estimées à partir du même nombre d'observations extrêmes ($N = 52$) mais le nombre de rentabilités de base (n) à partir desquels les extrêmes sont sélectionnés varie d'une distribution à l'autre. Les résultats empiriques sont reportés dans le tableau 2 pour trois fréquences données : 1 jour (rappel de la dernière ligne du tableau 1), 5 jours et 10 jours. Les lois d'extrêmes se déplacent vers la gauche (pour les minima) et vers la droite (pour les maxima) comme l'indique la valeur du paramètre de localisation qui augmente en valeur absolue et sont de plus en plus dispersées comme l'indique la valeur du paramètre de dispersion qui augmente alors que les queues des distributions décroissent de manière identique puisque la valeur de l'indice de queue reste stable.

22. Le test du ratio de vraisemblance montre que la loi de Gumbel (et a fortiori la loi de Weibull) est toujours rejetée en faveur de la loi de Fréchet. Par exemple, pour le cas des rentabilités minimales sélectionnées sur un trimestre, la valeur du test (distribué comme un chi-deux à un degré de liberté) est égale à 7,097 avec une probabilité de dépassement associée de 0,008. Le rejet de la loi de Gumbel pour les rentabilités extrêmes implique le rejet des lois à queues finies comme la loi normale pour le processus des rentabilités; le non-rejet de la loi de Fréchet est compatible avec des lois à queues épaisses comme les lois de Student et les processus GARCH. LONGIN (1995b) discute en détail comment on peut utiliser les résultats sur les extrêmes pour modéliser la loi de toutes les rentabilités.

FIGURE 4

Lois asymptotiques de Fréchet des rentabilités extrêmes.

Les rentabilités extrêmes sont sélectionnées sur des sous-périodes dont la longueur est fixée à une semaine ($T = 5$), deux semaines ($T = 10$), un mois ($T = 21$) et un trimestre ($T = 63$). Les sous-périodes ne se recouvrent pas. Les trois paramètres (α_n , β_n et τ) des lois de Fréchet correspondantes sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Les rentabilités extrêmes sont sélectionnées à partir des rentabilités de l'indice SBF 240 (base de données AFFI sur la période janvier 1997-juin 1990). Quand la longueur de la période de sélection s'accroît, la distribution se déplace vers la gauche pour les minima et vers la droite pour les maxima, et s'étend, tandis que la forme de la distribution et en particulier la décroissance des queues reste la même.



3.2.2. Calcul de la VaR pour une position

Les estimations obtenues ci-dessus sont maintenant utilisées pour calculer des VaRs pour des positions longue et courte sur le marché boursier français. Nous utilisons des rentabilités extrêmes sélectionnées sur un trimestre (cette longueur de période de sélection peut être retenue puisque l'hypothèse d'adéquation n'est pas rejetée par le test de Sherman)²³. Les résultats sont reportés dans le tableau 3 pour différents niveaux de probabilité extrême; il est intéressant de considérer plusieurs niveaux pour avoir une idée de la perte au-delà de la VaR (LONGIN, 1997b). Par exemple, pour une position longue de 100FF et pour une probabilité extrême égale à 50%, la VaR est de 2,17FF. En d'autres termes, il y a une chance sur deux que l'investisseur perde plus de 2,17FF en une seule séance boursière sur un trimestre, ou

23. BOULIER, DALAUD et LONGIN [1998] étudient la consistance des résultats de VaR pour différentes longueurs de période de sélection.

TABLEAU 2

Estimation des paramètres des lois asymptotiques de rentabilités journalières, hebdomadaires et bimensuelles extrêmes de l'indice SBF 240.

Fréquence des rentabilités de base	Rentabilités minimales			Rentabilités maximales		
	α_n	β_n	τ	α_n	β_n	τ
journalière ($f = 1, n = 52$)	0,796 (0,121)	-1,856 (0,136)	-0,386 (0,174)	0,664 (0,082)	1,887 (0,103)	-0,212 (0,108)
hebdomadaire ($f = 5, n = 12$)	0,928 (0,137)	-2,754 (0,197)	-0,428 (0,234)	1,391 (0,157)	2,781 (0,127)	-0,281 (0,150)
bimensuelle ($f = 10, n = 6$)	1,329 (0,210)	-3,455 (0,158)	-0,377 (0,246)	1,806 (0,142)	3,570 (0,139)	-0,175 (0,137)

Note: ce tableau donne les estimations du maximum de vraisemblance des trois paramètres des lois asymptotiques des rentabilités extrêmes sélectionnées à partir de rentabilités de base de différentes fréquences (1 jour, 5 jours et 10 jours) avec les écarts-types entre parenthèses. Les rentabilités extrêmes sont sélectionnées à partir des rentabilités de l'indice SBF 240 (base de données AFFI sur la période janvier 1977-juin 1990). Pour toutes les fréquences, la longueur de la période de sélection est prise approximativement égale à un trimestre ($T = 63$ pour la fréquence journalière et $T = 60$ pour les fréquences hebdomadaire et mensuelle). Ainsi, toutes les distributions soient estimées à partir du même nombre d'observations d'extrêmes ($N = 52$).

TABLEAU 3

VaR calculée d'après la méthode des valeurs extrêmes pour une position longue et une position courte dans l'indice SBF 240.

Probabilité extrême	Value at Risk (exprimée en % de la position)	
	Position longue	Position courte
50%	2,17	2,14
(2 trimestres)	[2,05, 2,29]	[2,04, 2,24]
75%	3,13	2,83
(4 trimestres)	[2,89, 3,37]	[2,67, 3,00]
90%	4,71	3,80
(10 trimestres)	[4,15, 5,27]	[3,48, 4,12]
95%	6,28	4,63
(20 trimestres)	[5,24, 7,33]	[4,11, 5,15]
99%	11,97	7,06
(100 trimestres)	[7,57, 16,37]	[5,41, 8,70]

Note: ce tableau indique la VaR pour une position de 100FF dans l'indice SBF 240 (ou encore la VaR exprimée en pourcentage du montant quelconque d'une position). Les cas de la position longue est traité grâce à la loi asymptotique des rentabilités minimales tandis que le cas de la position courte fait appel à la loi des rentabilités maximales (cf. la dernière ligne des tableaux 1A et B pour les estimations sur la période janvier 1977-juin 1990). Les rentabilités journalières extrêmes sont sélectionnées sur des trimestres ne se recouvrant pas ($T = 63$). La VaR est calculée pour des probabilités extrêmes variant de 50% à 99% correspondant à des périodes de retour indiquées en dessous entre parenthèses variant de 2 trimestres à 100 trimestres. Pour chaque estimation, un intervalle de confiance à 50% est dérivé des quartiles de la loi asymptotique et donné entre crochets.

encore, la période de retour moyenne ²⁴ pour observer une perte supérieure à 2,17FF est égale ici à 2 trimestres. Pour une probabilité extrême de 95% (équivalent à une période de retour moyenne de 20 trimestres ou 4 ans), la VaR s'élève à 6,28FF. Une probabilité extrême plus élevée implique une VaR plus élevée. Un intervalle de confiance traduisant l'incertitude sur l'estimation (l'erreur d'échantillonnage) de la loi de Fréchet peut être calculé ²⁵. Par exemple, pour une position longue et une probabilité extrême de 95%, il y a 50% de chance que la VaR estimée soit entre 5,24FF et 7,33FF. L'intervalle à 90% est [3,73FF, 8,84FF]. La VaR en fonction de la probabilité extrême est représentée sur la figure 5 avec une estimation de l'erreur de mesure correspondante.

3.2.3. Analyses de sensibilité

Notre méthode des valeurs extrêmes permet des analyses de sensibilité. En effet, c'est une méthode paramétrique qui donne une formule explicite pour la VaR (contrairement à la méthode de simulation historique qui est non-paramétrique). L'analyse de la sensibilité peut être conduite en terme de changement de la dispersion des extrêmes (variation du paramètre d'échelle α_n), en terme de changement de l'amplitude « moyenne » (variation du paramètre de localisation β_n) et en terme de changement de l'épaisseur des queues (variation de l'indice de queue τ). La sensibilité notée S est définie comme la variation relative de la VaR pour une variation relative d'un paramètre de 1%. Au seuil de probabilité de 95%, la VaR pour une position longue dans l'indice SBF 240 est surtout sensible au paramètre d'échelle ($S(\alpha_n) = 0,70$) et à l'indice de queue ($S(\tau) = 0,48$) et peu sensible au paramètre de localisation ($S(\beta_n) = 0,30$). Pour des seuils de probabilité plus conservateurs, la VaR est surtout sensible à l'indice de queue : $S(\tau) = 0,97$ pour $p = 0,99$.

3.3. Comparaison des méthodes et des approches

Nous comparons maintenant les résultats de VaR obtenus par les deux approches : l'approche traditionnelle qui s'intéresse à toute la distribution et l'approche des valeurs extrêmes qui s'intéresse en particulier aux queues de distribution. Pour chaque approche, différentes méthodes (lois statistiques) sont étudiées : la loi historique, la loi normale non-conditionnelle et des processus conditionnels pour l'approche traditionnelle d'une part, et la loi historique et la loi asymptotique pour l'approche des valeurs extrêmes d'autre part.

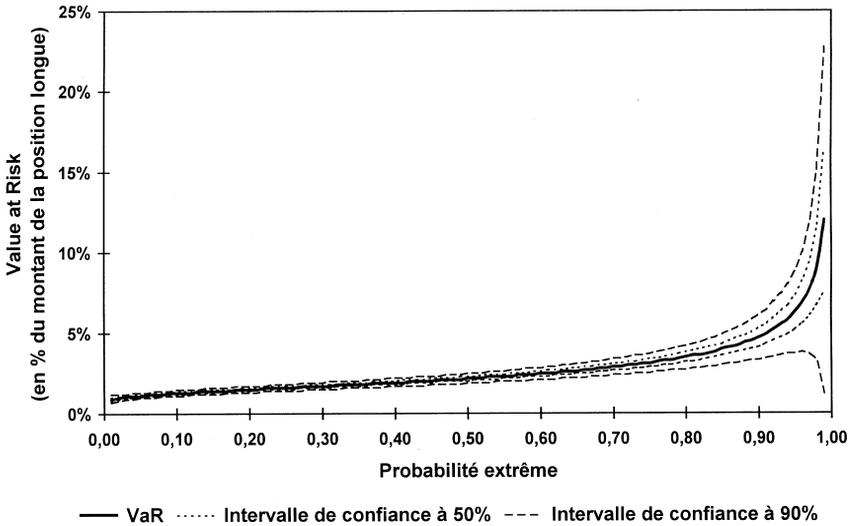
24. La période de retour moyenne $T(x)$ d'une réalisation d'une variable aléatoire X distribuée selon la loi F_X , inférieure ou égale à x , est donnée par la formule : $T(x) = \frac{1}{F_X(x)}$.

25. La formule de l'écart-type qui permet de calculer le quartile peut être trouvée dans KENDALL [1994]. Une discussion de l'incertitude sur les valeurs de VaR peut être trouvée JORION [1996].

FIGURE 5

VaR en fonction de la probabilité extrême.

La valeur de la VaR d'une position dépend de la valeur du seuil de probabilité choisie. Dans notre méthode, cette probabilité est qualifiée d'extrême puisqu'elle utilise les rentabilités extrêmes de la position. Comme le montre cette figure, une probabilité extrême plus forte implique une VaR plus élevée. La VaR étant une variable statistique calculée à partir de données, il est important de connaître l'incertitude liée à son estimation statistique (erreur d'échantillonnage) : les intervalles de confiance à 50% et à 90% représentés sur la figure en trait pointillé quantifient l'incertitude de mesure sur la VaR. La figure utilise la loi des rentabilités journalières minimales de l'indice SBF 240 sélectionnées sur des trimestres ne se recouvrant pas (base de données AFFI sur la période janvier 1997-juin 1990).



3.3.1. Description des méthodes

Méthodes pour l'approche traditionnelle

La méthode historique n'offre qu'un traitement brut des données. Dans l'approche traditionnelle, on utilise la loi historique des rentabilités de base et une probabilité usuelle p . Notons $VaR(F_r^{hist}, p)$ la VaR obtenue par la loi historique (approche traditionnelle).

La deuxième méthode retenue repose sur la connaissance supposée du comportement statistique des rentabilités de base. Dans un premier temps, nous considérons le cas de la loi normale non-conditionnelle. Les rentabilités de base sont supposées tirées d'une loi normale non-conditionnelle (à moyenne et variance constantes). Empiriquement, sur la période janvier 1997-juin 1990, la moyenne et l'écart-type des rentabilités journalières du marché ont été de 0,064% et 0,991%, soient en valeurs annuelles 16,10% et 15,66%. Nous notons $VaR(F_r^{norm}, p)$ la VaR obtenue par la loi normale

non-conditionnelle. Dans un deuxième temps, nous considérons le cas d'un processus conditionnel normal pour lequel la moyenne et la variance de la loi des rentabilités de base varie au cours du temps (c'est le cas par exemple du processus GARCH ou de processus utilisé dans RiskMetricsTM). Dans cette modélisation, les résultats de VaR dépendent des conditions du marché et en particulier du niveau de la volatilité. Notons $\text{VaR}(F_{r,t}^{\text{norm}}, p)$ la VaR calculée à la date t par la méthode conditionnelle.

Le modèle RiskMetricsTM développé par J. P. MORGAN [1995] est un exemple de modèle conditionnel dont les VaRs calculées à différentes dates reflètent le degré de volatilité du marché. Ce modèle utilise la loi normale avec une moyenne et une variance qui varient au cours du temps. En particulier, la variance estimée à la fin de la période t , notée σ_t^2 , suit un processus moyenne mobile à lissage exponentiel défini par

$$(12) \quad \sigma_t^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \omega_j \sigma_{t-j}^2, \text{ avec } \omega_j = \lambda^j (1 - \lambda), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Alternativement, l'équation de la volatilité peut se formuler sous la forme récursive.

$$(13) \quad \sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_t^2, \quad \sigma_0^2 \text{ donné}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

La variance initiale σ_0^2 est calculée à partir des premières observations de rentabilités. Une valeur optimale du paramètre λ peut être calculée pour décrire au mieux la volatilité observée. Pour la série étudiée, nous trouvons 0,87 (une valeur proche de 0,94, qui est appliquée à toutes les séries dans RiskMetricsTM). L'estimation du paramètre σ est nécessaire pour calculer la VaR à une date donnée.

Méthodes pour l'approche des valeurs extrêmes

La méthode historique peut aussi être utilisée pour mettre en œuvre l'approche des valeurs extrêmes : on utilise alors la loi historique des rentabilités extrêmes observées et une probabilité extrême p^{ext} . Notons, pour le cas d'une position longue, $\text{VaR}(F_{Z_n}^{\text{hist}}, p^{\text{ext}})$ la VaR obtenue par la loi historique (approche des valeurs extrêmes).

La dernière méthode utilisée est celle présentée précédemment (cf. sous-partie 3.1) : la loi asymptotique estimée des rentabilités extrêmes. Notons $\text{VaR}(F_{Z_n}^{\text{asympt}}, p^{\text{ext}})$ la VaR obtenue d'après la théorie des valeurs extrêmes.

3.3.2. Comparaison des VaRs

Pour que la comparaison des résultats obtenus par les deux approches (traditionnelle et valeurs extrêmes) ait un sens, nous supposons : $p^{\text{ext}} = p^n$. Nous considérons le cas d'une position longue. La probabilité extrême correspond à l'observation sur un trimestre d'une rentabilité journalière minimale de l'indice SBF 240. Le jugement que l'on peut porter sur les résultats d'une méthode peut être fondé sur la comparaison avec les résultats

de la méthode historique qui reflètent la réalité passée (une comparaison des résultats de VaR donnés par chaque modèle estimé sur le passé avec les réalisations des rentabilités observées dans le futur permettrait aussi de juger de la qualité de prévision chaque modèle).

Pour la méthode conditionnelle, deux types de marché sont considérés : un marché calme (la volatilité est égale à la moitié de la volatilité non-conditionnelle) et un marché agité (la volatilité est égale au double de la volatilité non-conditionnelle).

Les valeurs de VaRs calculées pour différents niveaux de probabilité extrême allant de 50% à 99% sont reportées dans le tableau 4 pour les différentes méthodes. Examinons les résultats pour une probabilité extrême de 95%. Les deux méthodes utilisées pour l'approche des valeurs extrêmes donnent des résultats similaires : la VaR est égale à 6,28 FF pour la loi asymptotique de Fréchet et à 6,61 FF pour la loi historique des rentabilités extrêmes. La similitude des résultats donnés par ces deux méthodes est conforme aux résultats du test de Sherman qui montraient que la loi de Fréchet décrivait bien les extrêmes observés. Comme l'expliquent BOULIER, DALAUD et LONGIN [1998], la méthode des valeurs extrêmes présente l'avantage d'être paramétrique et de permettre le calcul de VaR

TABLEAU 4

Comparaison des VaRs pour une position longue dans l'indice SBF 240.

Probabilité extrême (%)	Approche traditionnelle			Approche des valeurs extrêmes		
	Loi historique	Loi normale	Processus normal conditionnel		Loi historique	Loi asymptotique
			$\sigma_t = \sigma/2$ $\sigma_t = \sigma \cdot 2$			
50	2,66	2,22	1,08	4,50	2,26	2,17
75	4,18	2,53	1,23	5,13	3,24	3,13
90	5,79	2,86	1,40	5,78	5,50	4,71
95	6,61	3,07	1,50	6,21	6,61	6,28
99	non calculable	3,52	1,73	7,10	non calculable	11,97

Note: ce tableau donne les VaR obtenues à partir des méthodes des approches traditionnelle et des valeurs extrêmes : la loi historique, la loi normale (non-conditionnelle), un processus normal conditionnel pour l'approche traditionnelle d'une part, et la loi historique des rentabilités extrêmes et la loi asymptotique de Fréchet pour l'approche des valeurs extrêmes d'autre part. Les deux lois historiques, la loi normale et la loi asymptotique d'extrêmes donnent des résultats non-conditionnels, dans le sens où la VaR est identique quelles que soient les conditions de marché. Le processus normal conditionnel donne des résultats qui dépendent du degré de volatilité du marché; ce modèle est donc utilisé dans le cas d'une période calme (la volatilité étant égale à la moitié de la volatilité non-conditionnelle) et dans le cas d'une période agitée (la volatilité étant égale au double de la volatilité non-conditionnelle). Les modèles sont comparés pour une probabilité extrême donnée définie comme étant la probabilité d'observer sur un trimestre ($T = 63$) une rentabilité journalière minimale de l'indice SBF 240. Afin de pouvoir comparer les deux approches (traditionnelle et valeurs extrêmes), nous supposons ; $p^{ext} = p^n$. Tous les modèles sont estimés sur la période janvier 1977-juin 1990.

pour des valeurs de probabilité d'apparition d'extrêmes très faibles (la méthode historique est non-paramétrique et le calcul de VaR est limité par le nombre d'observations). La loi historique de l'approche traditionnelle donne des résultats semblables à la loi historique de l'approche des valeurs extrêmes. Pour le seuil de 95%, les deux VaRs sont identiques : 6,61 FF ²⁶. Une telle similitude s'explique par le fait que les deux lois utilisent les mêmes données empiriques. La valeur donnée par la loi normale non-conditionnelle est nettement inférieure : 3,07FF. Cela traduit le fait que la loi normale sous-estime les queues de distribution ²⁷. La méthode conditionnelle produit des valeurs de VaRs qui dépendent du degré de volatilité du marché. Avec une faible (forte) volatilité, les VaRs données par ce modèle sont inférieures (supérieures) à celles obtenues dans le cas normal non-conditionnel. La comparaison avec la loi de Fréchet montre que pour des probabilités extrêmes de 95% et 99%, les VaRs données par RiskMetricsTM sont inférieures à celles données par la loi de Fréchet.

Des conclusions similaires sont obtenues à partir de rentabilités de fréquence hebdomadaire ou bimensuelle. Notons aussi que de tels résultats sont aussi valides pour d'autres marchés comme le marché boursier américain (LONGIN [1996b]).

3.4. Mise en perspective de la réglementation

Les résultats précédents permettent une analyse de la réglementation en matière de risque de marché. Comme indiqué dans l'introduction, la charge en fonds propres n'est pas égale à la VaR calculée par les banques en interne mais égale à un multiple de la VaR; un coefficient multiplicateur m (égal à 3) apparaît en effet dans les formules (1) et (2) définies par les autorités de réglementation. Le fait que la loi normale sous-estime les queues de distribution explique sans doute la présence du facteur multiplicatif m dans ces formules. Ce multiplicateur permet de tenir compte du risque de modélisation qui provient des hypothèses plus ou moins réalistes pour modéliser le comportement des prix ²⁸.

26. La loi historique des rentabilités et la loi historique des rentabilités extrêmes peuvent donner des résultats numériques différents pour certaines valeurs de probabilités (voir tableau 4); cette différence s'explique par le fait que l'ensemble des observations de queues considérées par la méthode historique de l'approche traditionnelle ne correspond pas exactement à l'ensemble des observations extrêmes considérées par la méthode historique de l'approche des valeurs extrêmes.

27. Le sens de cette affirmation peut être précisé grâce à la théorie des valeurs extrêmes. La loi normale appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel caractérisée par une valeur d'indice de queue nulle. Or, empiriquement, les estimations de l'indice de queue reportées dans le tableau 1 sont toujours négatives et significativement différentes de zéro (au seuil de 5%), ce qui implique le rejet de la loi de Gumbel.

28. Une analyse approfondie de la réglementation sur les risques de marché peut être trouvée dans BOULIER, DALAUD et LONGIN [1998].

4 Conclusion

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode pour calculer la VaR d'une position. Les risques de marché se traduisent par un risque de faillite des institutions financières lié à la disparition des fonds propres. Nous mesurons ce risque extrême directement à partir des queues de distribution; nous n'utilisons pas comme c'est le cas d'habitude en finance une mesure du risque global comme la variance. La méthode s'appuie sur la théorie des valeurs extrêmes qui permet de prendre en compte explicitement les événements rares tels que les krachs boursiers. Nous avons appliqué la méthode au calcul de la VaR de positions courte et longue dans le marché boursier français. La comparaison de notre valeur de VaR calculée à partir des chocs extrêmes avec celles données par certaines méthodes existantes fondée sur la loi normale montre que celles-ci tendent à sous-estimer l'importance des événements rares. Ce fait est sans doute à l'origine du facteur multiplicatif dans les formules retenues par les autorités de réglementation.

Si notre méthode se prête bien au cas (simple) d'une position linéaire, des progrès restent à faire pour traiter des cas plus complexes. Deux directions de recherches futures peuvent être envisagées : le cas d'une position non-linéaire et le cas d'une position dont la composition évolue au cours du temps²⁹. Le premier problème (la non-linéarité des positions) est de toute importance puisque l'impact des chocs de marché peut être amplifié en présence d'options. Le deuxième problème (l'évolution des actifs composant le portefeuille et plus généralement l'agrégation des risques) nécessite une approche multivariée. L'extension de la théorie des valeurs extrêmes au cas multivarié permet d'étudier la corrélation des marchés en période de crise. La méthodologie présentée dans LONGIN [1996c] permet de répondre aux questions suivantes : une rupture de corrélation se produit-elle lorsque les marchés sont très agités? Les facteurs de risque sont-ils dépendants ou indépendants en période d'extrême volatilité?

Notre méthode vient compléter le spectre des différentes méthodes de mesure du risque existantes. Sa principale caractéristique est de tenir compte explicitement des conditions extrêmes de marché qui sont au centre des problèmes de réglementation en finance. Notre méthode est scientifique par nature mais les paramètres de la méthode restent à définir par l'utilisateur. La VaR calculée dans les conditions extrêmes de marché donne une information qui peut s'avérer très utile lors de prise de décisions en matière de fonds propres et plus généralement au niveau de la gestion des risques mais comme nous le rappelle Steven Thieke, responsable du Comité de Gestion des Risques de Marché chez JP Morgan: « *There has to be a point where this*

29. Une position est dite (non) linéaire si la variation de sa valeur est (non) proportionnelle à la variation du facteur de risque.

stops being a risk measurement methodology and becomes a management issue. »

● Références bibliographiques

- ARTZNER, P., DELBEAN, F., EBER, J.-M., HEATH, D. (1996). – “A Characterization of Measures of Risk”, *Document de Recherche de l'IRMA 96-014*, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France.
- BERMAN, S. M. (1963). – “Limiting Theorems for the Maximum Term in Stationary Sequences”, *Annals of Mathematical Statistics*, 35, pp. 502-516.
- BOUDOUKH, J., RICHARDSON, M., WHITELAW, R. (1995). – “Expect the Worst”, *Risk*, 8, pp. 100-101.
- BOULIER, J.-F., DALAUD, R., LONGIN, F. M. (1998). – “Application de la théorie des Valeurs Extrêmes aux Marchés Financiers”, *Banque et Marchés*, 32, pp. 5-14.
- Comité de Bâle sur le Contrôle Bancaire (1995). – “An Internal Model-Based Approach to Market Risk Capital Requirements”, Bâle, Suisse.
- Comité de Bâle sur le Contrôle Bancaire (1996a). – “Supervisory Framework for the Use of “Backtesting” in Conjunction with the Internal Approach to Market Risk Capital Requirement”, Bâle, Suisse.
- Comité de Bâle sur le Contrôle Bancaire (1996b). – “Amendement to the Capital Accord to Incorporate Market Risks”, Bâle, Suisse.
- Comité de Réglementation Bancaire (1995). – “Règlement 95-02”, Publié dans le *Journal Officiel de la République Française*, 21 juillet 1995.
- Commission Européenne (1995). – “Établissement de Crédit .Recueil des Actes Communautaires Adoptés ou Proposés”, Version en français mise à jour en Novembre 1995.
- DE HAAN, L., RESNICK, I. S., ROOTZÉN, H., DE VRIES, C. G. (1989). – “Extremal Behavior of Solutions to a Stochastic Difference Equation with Applications to ARCH Process”, *Stochastic Processes and their Applications*, 32, pp. 213-224.
- DELAUNAY, D. (1986). – “Vents Extrêmes Dus aux Cyclones Tropicaux dans les DOM-TOM”, *Cahiers du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment*, 2078, pp. 1-17.
- DIMSON, E., MARSCH, P. (1995). – “Capital Requirements for Securities Firms”, *Journal of Finance*, 50, pp. 821-851.
- EMBRECHTS, P. (1997). – “Extremes and Insurance”, *Document de Travail, ETZH*, Zürich, Suisse.
- EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. (1997). – “Modelling Extremal Events”, *Springer, Heidelberg*, Allemagne.
- INGLE, R. F. (1982). – “Auto-regressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, 50, pp. 897-1007.
- EPSTEIN, B., SOBEL, M. (1953). – “Life Testing”, *Journal of the American Statistical Association*, 48, pp. 486-502.
- FELLER, W. (1971). – “An Introduction to Probability Theory and its Applications”, Volume 2, Wiley, New York, États-Unis.
- GNEDENKO, B. V. (1943). – “Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Série Aléatoire”, *Annals of Mathematics*, 44, pp. 423-453.
- Groupe des Trente (1993). – “Derivatives: Practices and Principles”, New York, États-Unis.

- GUMBEL, E. J. (1941). – “The Return Period of Flooded Flows”, *Annals of Mathematical Statistics*, 12, pp. 163-190.
- GUMBEL, E. J. (1958). – “Statistics of Extremes”, Columbia University Press, New York, États-Unis.
- HAMON, J., JACQUILLAT, B. (1992). – “Le Marché Français des Actions. Études Empiriques 1977-1991”, *Presses Universitaires de France*, Paris, France.
- JACOB, B. (1989). – “Extrêmes de Variables Aléatoires et Processus”, *Document de Travail, École Nationale des Ponts et Chaussées*, Paris, France.
- JENKINSON, A. F. (1955). – “The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements”, *Quarterly Journal of the Royal Meteorology Society*, 87, pp. 147-158.
- JORION, P. (1996). – “Risk²: Measuring the Risk in Value at Risk”, *Financial Analysts Journal*, 52, pp. 47-56.
- JORION, P. (1997). – “Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk”, The McGraw-Hill Company, Chicago, États-Unis.
- MORGAN, J. P. (1995). – “RiskMetrics™-Technical Document”, *Troisième Édition*, New York, États-Unis.
- KENDALL (1994). – “*Kendall's Advanced Theory of Statistics*”, Éditions Edward Arnold, Sixième réédition de l'ouvrage par Alan Stuart et Keith J. Ord, Volume 1, New York, États-Unis.
- KERBAUL, O., MAYET, L., PILLIARD, L. (1997). – “Activités de Marché et Réglementation Internationale : Les Modèles Internes des Banques Françaises”, *Mémoire du Mastère Spécialisé en Techniques Financières*, ESSEC, Cergy-Pontoise, France.
- KUPIEC, P. H., O'BRIEN, J. M. (1996). – “Bank Capital Regulation for Market Risks”, *Document de recherche Spécial 90*, London School of Economics, Londres, Royaume-Unis.
- LEADBETTER, M. R., LINDGREN, G., ROOTZÉN H. (1983). - “Extremes aux Related Properties of Random Sequences and Processes”, Springer Verlag, New York, États-Unis.
- LONGIN, F. M. (1993). – “Volatilité et Mouvements Extrêmes du Marché Boursier”, Thèse, HEC, Jouy-en-Josas, France.
- LONGIN, F. M. (1994). – “Optimal Margins in Futures Markets: A Method Based on Extreme Price Movements”, *Proceedings of the Seventh Chicago Board Of Trade Conference on Futures and Options*, Bonn, Allemagne.
- LONGIN, F. M. (1995a). – “La Théorie des Valeurs Extrêmes : Présentation et Premières Applications en Finance”, *Journal de la Société Statistique de Paris*, 136, pp. 77-97.
- LONGIN, F. M. (1995b). – “Le Choix de la Loi des Rentabilités d'Actifs Financiers : Les Valeurs Extrêmes Peuvent Aider”, *Finance*, 16, pp. 25-47.
- LONGIN, F. M. (1996a). – “The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns”, *Journal of Business*, 63, pp. 383-408.
- LONGIN, F. M. (1996b). – “From VaR to Stress Testing: The Extreme Value Approach”, *Document de Recherche*, ESSEC, Cergy-Pontoise, France.
- LONGIN, F. M. (1996c). – “Correlation of Extremes: Theory and Applications in Finance”, *Document de Travail*, ESSEC, Cergy-Pontoise, France.
- LONGIN, F. M. (1997a). – “The Threshold Effect in Expected Volatility: A Model Based on Asymmetric Information”, *The Review of Financial Studies*, 10, pp. 837-869.
- LONGIN, F. M. (1997b). – “Beyond the VaR”, *Document de Recherche*, ESSEC, Cergy-Pontoise, France.
- NOUY, D. (1996). – “Renforcer la Couverture des Risques de Marché”, *Banque*, 569, pp. 18-22.
- RISK (1995). – “Value at Risk”, *Special Supplement of Risk*.

- SHERMAN, L. K. (1957). – “Percentiles of the Ω_n Statistic”, *Annals of Mathematical Statistics*, 28, pp. 259-268.
- TIAGO DE OLIVEIRA, J. (1973). – “Statistical Extremes - A Survey”, *Centre de Mathématiques appliquées*, Faculté des Sciences, Lisbonne, Portugal.
- WILSON, T. C. (1996). – “Calculating Risk Capital”, Dans *The Handbook of Risk Management and Analysis* Édité par Carol Alexander, John Wiley & Sons, Chichester, Royaume-Uni.