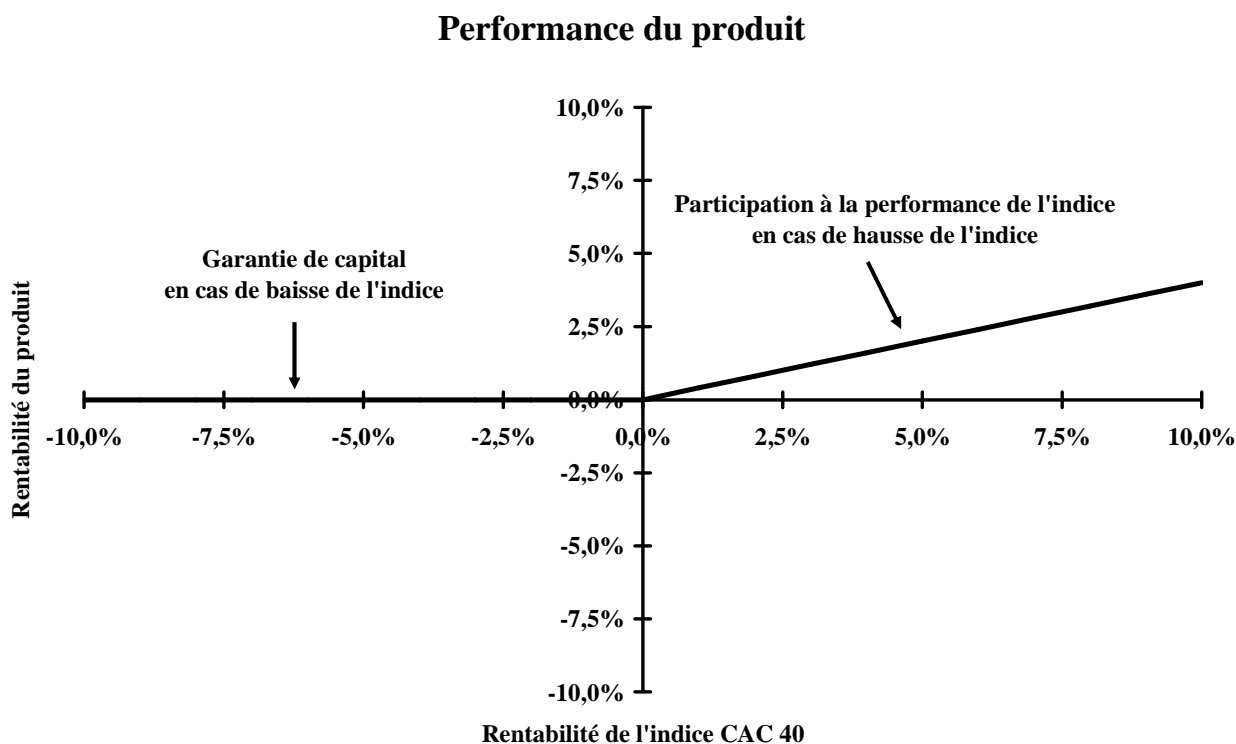


Correction de l'exercice du cours Gestion financière à court terme : « Analyse d'un produit structuré à capital garanti »

Question 1 : représenter graphiquement le taux de rentabilité du produit à capital garanti en fonction de du taux de rentabilité de l'indice CAC 40 sur la période d'investissement. En déduire la décomposition du produit à capital garanti en produits simples (achat/vente de titres sans risque, achat/vente de l'indice CAC 40, achat/vente de *calls*, achat/vente de *puts*, etc.).

Rappelons la structure de rémunération du produit. En cas de hausse de l'indice CAC 40 sur la période d'investissement, la performance du produit est égale à 40% de la performance de l'indice. En cas de baisse de l'indice CAC 40, la performance du produit est nulle, le trésorier retrouvant le montant investi initialement.



En investissant dans un produit à capital garanti, le trésorier de l'entreprise a une position longue en titres sans risque (obligations d'Etat) et une position longue sur des *calls* à la monnaie sur l'indice CAC 40.

Question 2 : expliquer comment la banque « fabrique » un produit à capital garanti. On décrira les opérations financières réalisées par la banque aux différentes dates pertinentes. Expliquer comment la banque se rémunère sur ce type de produit. Calculer la marge de la banque en livres sterling et en pourcentage du nominal du produit.

La banque fabrique un capital garanti au début de l'opération en investissant en titres sans

risque pour assurer la garantie et en achetant des *calls* à la monnaie sur l'indice CAC 40 pour avoir une exposition à la hausse de l'indice.

Plus précisément, le 1^{er} août, la banque achète des titres sans risque tel que la valeur de cet investissement au bout de 6 mois donne exactement le capital garanti, soit le nominal du produit dans le cas présent. Le montant de titres sans risque achetés est donné par :

$$\frac{1\,000\,000}{(1+0.05)^{0.5}} = 975\,900,07 \text{ €}$$

La banque dispose alors de 24 099,93 € (=1 000 000-975 900,07) pour investir dans des *calls* et pour sa marge.

Les *calls* à acheter sont des *calls* sur l'indice CAC 40 avec un nominal global de 1 000 000 €, prix d'exercice de 1 000 000 € et une maturité de 6 mois. Le nominal global des *calls* achetés doit être égal à la valeur nominale du produit. Les *calls* doivent être émis à la monnaie car le capital garanti correspond au nominal du produit. La maturité des *calls* doit être égale à 6 mois car il s'agit de la maturité du produit. Le prix de ces *calls* est égal à 41 922,70 € (=0,41923×1 000 000). Comme le taux de participation proposé au client est de 40%, le montant investi en *calls* est égal à 16 769,08 € (=0,4×41 922,70).

La marge pour la banque est égale à la différence entre le montant disponible 24 099,93 € et le montant investi en *calls* 16 769,08 €, soit 7 330,85 €, ce qui correspond à 1,47% du capital (en taux annuel). Cette marge prélevée au début de la vie du produit est indépendante de l'évolution de la valeur de l'indice.

Au bout de 6 mois, le 1^{er} janvier, la valeur de l'investissement en titres sans risque valorisé au taux annuel de 5% est exactement de 1 000 000 €, ce qui permet d'assurer la garantie du produit. Deux cas se présentent alors selon l'évolution baissière ou haussière de l'indice CAC 40.

Si l'indice CAC 40 a baissé par rapport à son niveau du 1^{er} août, les *calls* achetés expirent en dehors de la monnaie et la banque dispose de 1 000 000 € qu'elle verse au trésorier. Dans ce cas, la marge de la banque est de 7 330,85 €.

Si l'indice CAC 40 a monté par rapport à son niveau du 1^{er} août, les *calls* achetés expirent dans la monnaie. Le *pay-off* des *calls* est égal à :

$$0,40 \times 1\,000\,000 \text{ €} \times \max\left(\frac{CAC40_{01/01}}{CAC40_{01/08}} - 1; 0\right)$$

ce qui donne 40% de la performance de l'indice CAC 40 sur la période.

Question 3 : étudier la sensibilité du taux de participation du produit à capital garanti. Identifier les variables de marché pertinents, indiquer l'impact ces variables sur le taux de participation (signe) et quantifier cet impact (taille) à l'aide d'exemples numériques. Dans quelles configurations de marché le taux de participation du produit à capital garanti est-il particulièrement élevé ?

A la marge près, le taux de participation du produit garanti dépend des conditions de marché influençant le montant disponible pour investir en *calls* et la valeur des *calls* achetés. Par conditions de marché, on entend le niveau du taux d'intérêt sans risque et du niveau de la volatilité implicite.

Le montant disponible est influencé par le taux d'intérêt sans risque. Plus le taux est élevé, plus le montant disponible pour investir en *calls* et pour la marge est élevé. La valeur des *calls* est

influencée par le taux d'intérêt sans risque et par la volatilité de l'actif sous-jacent. Plus le taux d'intérêt sans risque est élevé, plus la valeur des *calls* est élevée. Plus la volatilité est élevée, plus la valeur des *calls* est élevée.

L'effet du taux d'intérêt sans risque peut apparaître ambigu. D'un côté, un taux plus élevé entraîne plus de fonds pour investir en *calls* (à marge en euros constante). D'un autre côté, un taux plus élevé entraîne une augmentation de la valeur des *calls*. Cependant, l'effet négatif du taux d'intérêt sur le prix des *calls* achetés n'est limité qu'aux *calls* alors que l'effet positif du taux d'intérêt sur le placement en titres sans risque concerne le nominal du produit qui est bien plus élevé. L'effet du taux d'intérêt sur le taux de participation d'un produit à capital garanti est donc vraisemblablement positif.

L'effet de la volatilité est sans ambiguïté. Un niveau de volatilité plus élevé entraîne une augmentation de la valeur des *calls*. A marge en euros constante, le taux de participation sera moins élevé.

Notons que ni le cours du sous-jacent, ni le prix d'exercice n'ont d'impact sur le taux de participation car, par construction, les *calls* sont vendus à la monnaie. Quant à la maturité des *calls*, elle est égale, par construction, à la maturité du produit à capital garanti.

Illustrons ces effets à l'aide d'exemples numériques obtenus en modifiant un paramètre à la fois, soit la volatilité, soit le taux d'intérêt.

Si la volatilité de l'indice CAC 40 était de 11% (au lieu de 10%), le prix des *calls* est égal à 44 552,92 € au lieu de 41 922,70 €. A marge constante pour la banque, le montant investi en *calls* est identique 16 769,08€. Le taux de participation proposé au client est donc égal à 37,64% (=16 769,08/41 922,70). Le taux de participation est donc plus faible : 37,64% au lieu de 40%.

Si le taux d'intérêt sans risque était de 6% (au lieu de 5%), d'une part, le montant disponible pour investir en *calls* et pour la marge serait plus élevé : 28 714,14 € au lieu de 24 099,93 €, mais d'autre part, le prix des *calls* serait plus élevé : 45 026,78 € au lieu de 41 922,70 €. A marge constante pour la banque, le montant investi en *calls* est plus élevé : 21 383,29 € au lieu de 16 769,08€. Le taux de participation proposé au client est donc égal à 47,49% (=21 383,29/45 026,78). Le taux de participation est donc plus élevé : 47,49% au lieu de 40%.

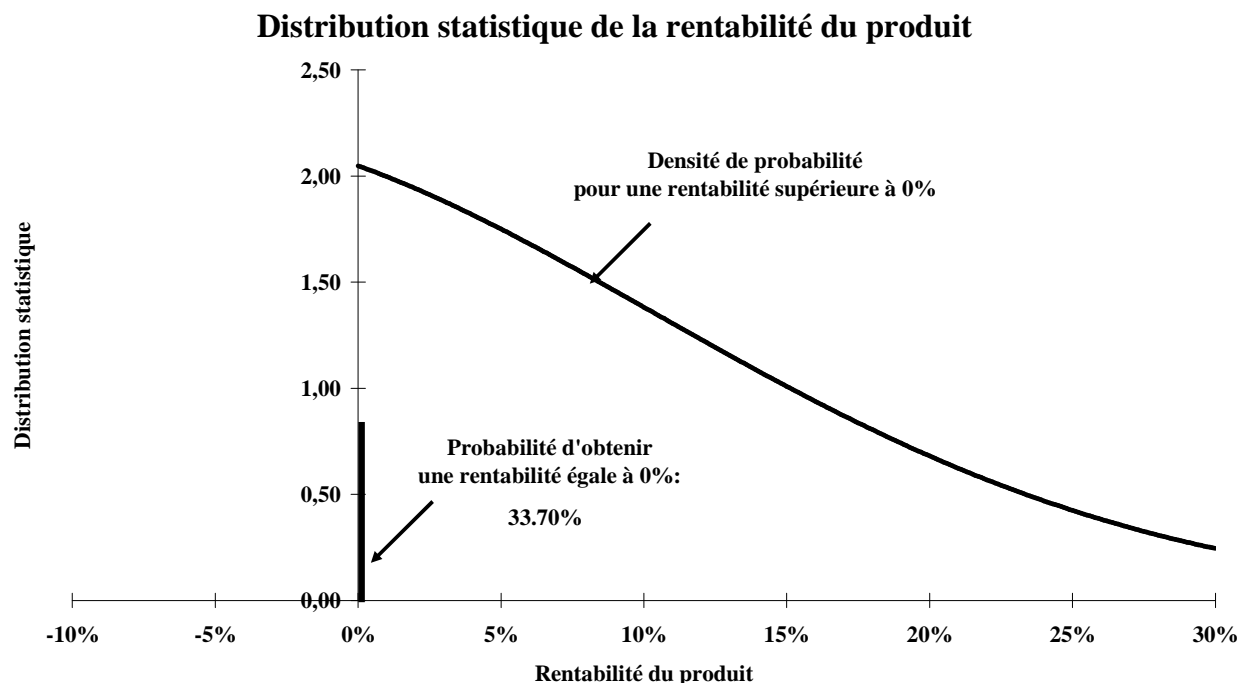
Le taux de participation d'un produit à capital garanti sera le plus élevé dans les conditions de marché suivantes : taux d'intérêt sans risque élevé et volatilité faible.

Question 4 : représenter graphiquement la distribution statistique du taux de participation du produit à capital garanti. On supposera par exemple que la distribution statistique du taux de rentabilité de l'indice CAC 40 est normale. Indiquer les informations pertinentes sur le graphique.

La distribution statistique de la rentabilité d'un produit à capital garanti est mixte : discrète pour la valeur 0% (qui correspond au niveau de la garanti par rapport au nominal) et continue pour les valeurs strictement supérieures à ce taux. La probabilité d'obtenir une rémunération nulle est égale à la probabilité d'une baisse de l'indice CAC 40 sur la période d'investissement. La densité de la rentabilité du produit pour une valeur strictement supérieure à 0% (+2% par exemple) est à égale la densité de la rentabilité de l'indice CAC 40 pour la même valeur.

Pour calculer la masse de probabilité sur la valeur 0% et la densité de probabilité pour les valeurs strictement supérieures, il est nécessaire de calculer la densité de la rentabilité de l'indice CAC 40. En supposant que le comportement statistique de cette rentabilité peut être modélisé par

une loi normale, il reste à calculer sa moyenne et son écart-type. La moyenne correspond à la rentabilité anticipée par le marché sur la période d'investissement. L'écart-type correspond à la volatilité anticipée par le marché, volatilité que l'on peut obtenir à partir de la volatilité implicite des options pour une maturité égale à la période d'investissement. Cette volatilité peut être obtenue comme une moyenne des volatilités en dehors de la monnaie, à la monnaie et dans la monnaie. Numériquement, la moyenne est égale à 3% et l'écart-type à 7,13% (taux période sur les 6 mois).



Question 5 : quel est le principal avantage et le principal inconvénient d'un produit à capital garanti pour un placement de trésorerie ? Suggérer une modification du produit proposé par la banque pour augmenter les taux de participation si le trésorier était prêt à prendre un petit risque sur le capital investi.

Le principal avantage d'un produit à capital garanti est la garantie du capital investi. C'est une propriété recherchée par les trésoriers d'entreprise qui ne souhaitent pas prendre de risque sur le capital investi.

Le principal inconvénient d'un produit à capital garanti est la faible exposition au marché (40% dans l'exemple considéré). Notons aussi que le trésorier risque d'avoir une rentabilité nulle de son placement avec une probabilité non négligeable (33,70%) ou encore de faire moins bien que le taux sans risque.

Afin de limiter cet inconvénient, la banque pourrait modifier le niveau de la garantie du produit en ne protégeant que 95% du nominal au lieu de 100%. Cela permettrait d'augmenter l'exposition au marché pour un risque de perte en capital relativement faible. Au niveau de la construction du produit, cela se traduirait par l'achat de *calls* en dehors de la monnaie.