Correction de l'exercice 3 du quiz de rattrapage du cours Gestion financière (2020-2021) : « Evaluation de rentes »

Question 1 : montrer que la valeur d'une rente, notée V_0, versant un coupon constant C à la fin de chaque période jusqu'à la date T ($T<+\infty$), le premier versement intervenant à la fin de la première période, est donnée par la formule suivante :

$$V_0 = \frac{C}{r} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right).$$

En déduire le prix d'une rente perpétuelle ($T=+\infty$) à coupon constant.

La valeur d'une rente à maturité finie est égale à la valeur présente des flux futurs de la rente :

$$V_0 = VP\left(\left(F_t\right)_{t=1,T}, r\right)$$

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t}$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^t}$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{(1+r)^t}$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T}{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)}$$

$$V_0 = \frac{C}{r} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right).$$

La valeur d'une rente perpétuelle ($T=+\infty$) est égale à la limite de la valeur d'une rente à maturité finie lorsque la maturité T de la rente tend vers l'infini :

$$V_0 = \lim_{T \to +\infty} \frac{C}{r} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right).$$

La valeur d'une rente perpétuelle à coupon constant est donc égale à C/r.

Question 2 : calculer la valeur du coupon correspondant à une rente de maturité égale à 4 ans dont la valeur est égale à 3.169,65 €, le dernier coupon venant d'être versé et le taux d'actualisation étant égal à 10%.

D'après la question précédente, la valeur du coupon *C* est donnée par la formule :

$$C = \frac{V_0 \cdot r}{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T}.$$

Numériquement :

$$C = \frac{3.169{,}65 \cdot 0{,}10}{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}10}\right)^4} = 1.000 \text{ €}.$$

Question 3 : calculer formellement la valeur d'une rente versant un coupon indexé jusqu'à la date *T* (*T*<+∞). En déduire le prix d'une rente perpétuelle (*T*=+∞) à coupon indexé.

La valeur de la rente est égale à la valeur présente des flux futurs de la rente :

$$V_0 = VP\left((F_t)_{t=1,T}, r\right)$$

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C \cdot (1+g)^{t-1}}{(1+r)^t}$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^t$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T}{1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)}$$

$$V_0 = \frac{C}{r-g} \cdot \left(1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T\right).$$

La valeur d'une rente perpétuelle (*T*=+∞) à coupon indexé est égale à la limite de la valeur d'une rente à coupon indexé lorsque la maturité *T* de la rente tend vers l'infini :

$$V_0 = \lim_{T \to +\infty} \frac{C}{r-g} \cdot \left(1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T\right).$$

La valeur d'une rente perpétuelle à coupon indexé est donc égale à $C/(r\text{-}g)$.

Question 4 : calculer la valeur du prochain coupon d'une rente perpétuelle versant un coupon annuel indexé, le prix actuel de la rente étant de 5 000 €, le dernier coupon venant d'être détaché, le taux d'indexation étant égal à 3% et le taux d'actualisation étant égal à 10%.

D'après la question précédente, la valeur du coupon C est donnée par la formule :

$$C = V_0 \cdot (r - g).$$

Numériquement :

$$C = 5.000 \cdot (0{,}10 - 0{,}03) = 350 \text{ €}.$$