

Exercice 3 du quiz de rattrapage du cours Gestion financière (2020-2021) : « Evaluation de rentes » (5 points)

Cet exercice a pour objet d'étudier la valeur d'une rente. Une rente est un produit financier commercialisé en général par les compagnies d'assurance qui verse à son détenteur une somme d'agent (le coupon) à intervalles réguliers sur une période donnée. La valeur du coupon, la fréquence des paiements et la période sont définis contractuellement. La période peut être définie et fixe (10 ans par exemple), définie et infinie (on parle alors de « rente perpétuelle ») ou encore définie par un événement comme le décès du détenteur de la rente (on parle alors de « rente viagère »). La valeur du coupon versé peut être fixe ou indexée.

A) Evaluation d'une rente à coupon constant

On considère une rente dont la valeur du coupon versé à la fin de chaque période est constante au cours du temps. Le taux d'actualisation est égal à r .

Question 1 : montrer que la valeur d'une rente, notée V_0 , versant un coupon constant C à la fin de chaque période jusqu'à la date T ($T < +\infty$), le premier versement intervenant à la fin de la première période, est donnée par la formule suivante :

$$V_0 = \frac{C}{r} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r} \right)^T \right).$$

En déduire le prix d'une rente perpétuelle ($T = +\infty$) à coupon constant.

Question 2 : calculer la valeur du coupon correspondant à une rente de maturité égale à 4 ans dont la valeur est égale à 3.169,65 €, le dernier coupon venant d'être versé et le taux d'actualisation étant égal à 10%.

B) Evaluation d'une rente à coupon indexé

On considère à présent une rente dont la valeur du coupon versé à la fin de chaque période est indexée au cours du temps. La valeur du premier coupon est égale à C . Chaque période, la valeur du coupon distribué par la rente est indexée sur un taux noté g (supposé constant au cours du temps). Ce taux reflète en général l'inflation. A la fin de la deuxième période, la valeur du coupon distribué est donc égale à $C \cdot (1+g)$.

Question 3 : calculer formellement la valeur d'une rente versant un coupon indexé jusqu'à la date T ($T < +\infty$). En déduire le prix d'une rente perpétuelle ($T = +\infty$) à coupon indexé.

Question 4 : calculer la valeur du prochain coupon d'une rente perpétuelle versant un coupon annuel indexé, le prix actuel de la rente étant de 5 000 €, le dernier coupon venant d'être détaché, le taux d'indexation étant égal à 3% et le taux d'actualisation étant égal à 10%.

On rappelle que la somme d'une série géométrique ($1 + q + q^2 + \dots + q^{T-1}$) est égale à la quantité $\frac{1 - q^T}{1 - q}$.

Table financière donnant la valeur présente du flux d'un placement versant 1 euro dans n années actualisée au taux r .

$n \backslash r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909
2	0,980	0,961	0,943	0,925	0,907	0,890	0,873	0,857	0,842	0,826
3	0,971	0,942	0,915	0,889	0,864	0,840	0,816	0,794	0,772	0,751
4	0,961	0,924	0,888	0,855	0,823	0,792	0,763	0,735	0,708	0,683
5	0,951	0,906	0,863	0,822	0,784	0,747	0,713	0,681	0,650	0,621
6	0,942	0,888	0,837	0,790	0,746	0,705	0,666	0,630	0,596	0,564
7	0,933	0,871	0,813	0,760	0,711	0,665	0,623	0,583	0,547	0,513
8	0,923	0,853	0,789	0,731	0,677	0,627	0,582	0,540	0,502	0,467
9	0,914	0,837	0,766	0,703	0,645	0,592	0,544	0,500	0,460	0,424
10	0,905	0,820	0,744	0,676	0,614	0,558	0,508	0,463	0,422	0,386

$n \backslash r$	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,847	0,840	0,833
2	0,812	0,797	0,783	0,769	0,756	0,743	0,731	0,718	0,706	0,694
3	0,731	0,712	0,693	0,675	0,658	0,641	0,624	0,609	0,593	0,579
4	0,659	0,636	0,613	0,592	0,572	0,552	0,534	0,516	0,499	0,482
5	0,593	0,567	0,543	0,519	0,497	0,476	0,456	0,437	0,419	0,402
6	0,535	0,507	0,480	0,456	0,432	0,410	0,390	0,370	0,352	0,335
7	0,482	0,452	0,425	0,400	0,376	0,354	0,333	0,314	0,296	0,279
8	0,434	0,404	0,376	0,351	0,327	0,305	0,285	0,266	0,249	0,233
9	0,391	0,361	0,333	0,308	0,284	0,263	0,243	0,225	0,209	0,194
10	0,352	0,322	0,295	0,270	0,247	0,227	0,208	0,191	0,176	0,162

Table financière donnant la valeur présente de la séquence de flux d'un placement versant 1 euro pendant n années actualisée au taux r .

$n \backslash r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,990	0,980	0,971	0,962	0,952	0,943	0,935	0,926	0,917	0,909
2	1,970	1,942	1,913	1,886	1,859	1,833	1,808	1,783	1,759	1,736
3	2,941	2,884	2,829	2,775	2,723	2,673	2,624	2,577	2,531	2,487
4	3,902	3,808	3,717	3,630	3,546	3,465	3,387	3,312	3,240	3,170
5	4,853	4,713	4,580	4,452	4,329	4,212	4,100	3,993	3,890	3,791
6	5,795	5,601	5,417	5,242	5,076	4,917	4,767	4,623	4,486	4,355
7	6,728	6,472	6,230	6,002	5,786	5,582	5,389	5,206	5,033	4,868
8	7,652	7,325	7,020	6,733	6,463	6,210	5,971	5,747	5,535	5,335
9	8,566	8,162	7,786	7,435	7,108	6,802	6,515	6,247	5,995	5,759
10	9,471	8,983	8,530	8,111	7,722	7,360	7,024	6,710	6,418	6,145

$n \backslash r$	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,901	0,893	0,885	0,877	0,870	0,862	0,855	0,847	0,840	0,833
2	1,713	1,690	1,668	1,647	1,626	1,605	1,585	1,566	1,547	1,528
3	2,444	2,402	2,361	2,322	2,283	2,246	2,210	2,174	2,140	2,106
4	3,102	3,037	2,974	2,914	2,855	2,798	2,743	2,690	2,639	2,589
5	3,696	3,605	3,517	3,433	3,352	3,274	3,199	3,127	3,058	2,991
6	4,231	4,111	3,998	3,889	3,784	3,685	3,589	3,498	3,410	3,326
7	4,712	4,564	4,423	4,288	4,160	4,039	3,922	3,812	3,706	3,605
8	5,146	4,968	4,799	4,639	4,487	4,344	4,207	4,078	3,954	3,837
9	5,537	5,328	5,132	4,946	4,772	4,607	4,451	4,303	4,163	4,031
10	5,889	5,650	5,426	5,216	5,019	4,833	4,659	4,494	4,339	4,192