Correction de l’exercice du cours Gestion financière : « Warren Buffett Offers $1 Billion For Perfect March Madness Bracket »

Question 1 : calculer la valeur d’une rente versant un coupon constant C à la fin de chaque période pendant T années sachant que le taux d’actualisation est égal à r. En déduire que la valeur d’une rente perpétuelle (qui correspond au cas particulier T = +∞) est égale à C/r.

La valeur de la rente, notée V_0, est égale à la valeur présente des flux futurs :

$$V_0 = VP\left(\left(F_t\right)_{t=1,T}, r\right)$$

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t}$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^{t-1}}$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{(1+r)^t}$$

$$V_0 = \frac{C}{1+r} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^T}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)}$$

$$V_0 = \frac{C}{r} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right).$$

En faisant tendre T vers l’infini dans la formule ci-dessus, on obtient la valeur d’une rente perpétuelle à coupon constant :

$$V_0 = \frac{C}{r}.$$

Question 2 : montrer que la valeur d'une rente à coupon constant *C* actualisée avec un taux *r* peut être approchée par la valeur d'une rente perpétuelle en commettant une erreur relative inférieure à *x*% pour des durées supérieures à :

$$\frac{\ln \frac{x}{1+x}}{\ln \frac{1}{1+r}}$$

L'erreur relative (en %) commise en remplaçant la valeur d'une rente par la rente perpétuelle de même caractéristique est donnée par

$$\frac{\frac{C}{r} - \frac{C}{r} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right)}{\frac{C}{r} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T\right)}$$

Soit après simplification :

$$\frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^T}{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T}$$

On recherche la valeur de *T* pour que l'erreur relative soit égale à *x*% :

$$\frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^T}{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^T} = x$$

Soit après calcul :

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^T = \frac{x}{1+x}$$

$$T \cdot \ln\left(\frac{1}{1+r}\right) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

Soit

$$T = \frac{\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)}{\ln\left(\frac{1}{1+r}\right)}$$

Quelle est la durée minimale d'une rente avec un coupon annuel constant de 25 M$ et un taux d'actualisation de 5% pour pouvoir utiliser la valeur d'une rente perpétuelle de même caractéristiques au lieu de la valeur exacte de la rente avec une erreur relative inférieure à 10% ?

D'après la formule précédente, la durée limite pour utiliser l'approximation est de 49,15 années.

Quelle est l'erreur relative commise en remplaçant la valeur d'une rente avec un coupon annuel constant de 25 M$, une durée de 40 ans et un taux d'actualisation de 5% par la valeur de la rente perpétuelle de même caractéristiques ?

La valeur d'une rente avec un coupon annuel constant de 25 M$ d'une durée de 40 ans, calculée avec un taux d'actualisation de 5%, est donnée par :

$$\frac{25}{0.05}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{1+0.05}\right)^{40}\right)$$

Soit une valeur actuelle de 428.98 M$.

La valeur d'une rente perpétuelle avec un coupon annuel constant de 25 M$, calculée avec un taux d'actualisation de 5%, est donnée par :

$$\frac{25}{0.05}$$

Soit une valeur actuelle de 500 M$.

L'erreur relative est donc égale à 16,56%. Il s'agit d'une erreur de surestimation.

Question 3 : pour un taux d'actualisation de 5%, déterminer s'il est préférable pour le gagnant de toucher 500 M$ aujourd'hui ou de toucher 25 M$ pendant 40 ans ?

D'après les calculs précédents, la valeur actualisée des flux d'une rente avec un coupon annuel constant de 25 M$ et une durée de 40 années, calculée avec un taux d'actualisation de 5%, est égale à 428,98 M$. Il est donc préférable de toucher 500 M$ aujourd'hui.

Au lieu de calculer la valeur exacte de la rente de durée finie, on peut utiliser la valeur approchée de la rente perpétuelle qui est de 500 M$ et faire remarquer qu'il s'agit d'une surestimation de la vraie valeur (la valeur d'une rente de durée finie est inférieure à la durée dune rente de durée infinie). On en conclut de même qu'il est préférable de toucher 500 M$ aujourd'hui.