

Correction de l'exercice complémentaire du cours Gestion de patrimoine : « Evaluation et couverture d'options »

Question 1 : calculer le prix du call et le prix du put à l'aide de la formule de Black-Scholes-Merton.

D'après la formule de Black Scholes, le prix du call est de 6,25 € et le prix du put est de 3,79 €.

Question 2 : vérifier la relation de parité call / put.

Pour un sous-jacent ne versant pas de dividendes, la relation parité call – put s'écrit :

$$C_0 = P_0 + S_0 - K \cdot e^{-rT},$$

où C_0 , P_0 et S_0 représentent la valeur d'un *call*, d'un *put* et de l'actif sous-jacent à la date 0 et r le taux d'intérêt sans risque.

Numériquement : $6,25 = 3,79 + 100 - 97,53$.

Question 3 : étudier l'effet de la variation des valeurs des paramètres suivants sur le prix d'une option : cours de l'actif sous-jacent, prix d'exercice, maturité, taux d'intérêt, taux de dividende et volatilité. On calculera les sensibilités avec des valeurs de ces paramètres légèrement différentes de celles données ci-dessus (+1% par exemple).

- Influence du prix de l'actif sous-jacent :

Lorsque le prix de l'actif sous-jacent augmente de 1% (il passe de 100 € à 101 €), le prix du call passe de 6,25 € à 6,87 €, soit une hausse de 9,89% et le prix du put passe de 3,79 € à 3,40 €, soit une baisse de 10,07%.

- Influence du prix d'exercice :

Quand on considère une option avec un prix d'exercice plus élevé, 101 € au lieu de 100 €, le prix du call passe de 5,47 € à 4,99 €, soit une baisse de 8,89% et le prix du put passe de 4,47 € à 4,98 €, soit une hausse de 11,43%.

- Influence de la maturité de l'option :

Quand on considère des options avec une maturité supérieure, 14 semaines au lieu de 13 semaines, le prix du call passe de 6,25 € à 6,54 €, soit une hausse de 4,57% et le prix du put passe de 3,79 € à 3,88 €, soit une hausse de 2,60%. Cette sensibilité reflète aussi l'influence du passage du temps (mais en signe opposé).

- Influence du taux d'intérêt sans risque :

Lorsque le taux d'intérêt sans risque passe de 10% à 11%, le prix du call passe de 6,25 € à 6,39 €, soit une hausse de 2,18% et le prix du put passe de 3,79 € à 3,68 €, soit une baisse de 2,84%.

- Influence de la volatilité :

Lorsque la volatilité passe de 25% à 30%, le prix du call passe de 6,25 € à 7,22 €, soit une hausse de 15,45% et le prix du put passe de 3,79 € à 4,75 €, soit une hausse de 25,53%.

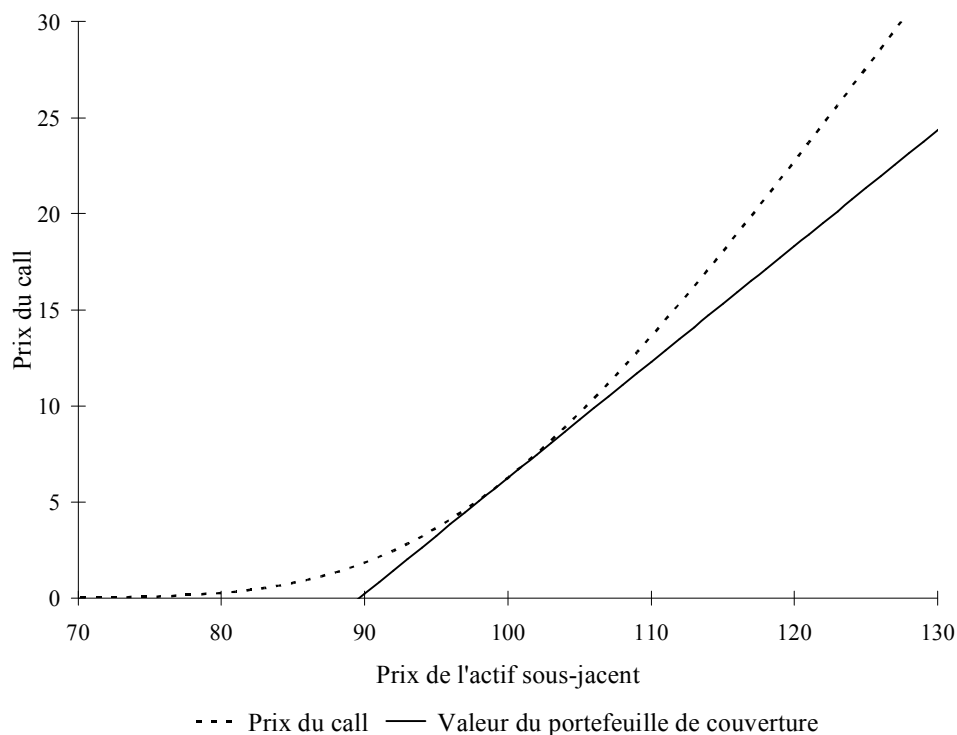
- Influence du taux de dividende :

Lorsque le taux d'intérêt sans risque passe de 0% à 4,04%, le prix du call passe de 5,47 € à 5,48 €, soit une hausse de 0,09% et le prix du put passe de 4,47 € à 4,47 €, soit une baisse de 0,11%.

Question 4 : déterminer le portefeuille de couverture pour le call et pour le put. Donner une représentation graphique du portefeuille de couverture.

Pour le call, le portefeuille de couverture est composé d'une position longue de 60,35 € en actif sous-jacent (0,6035 d'action) et d'une position courte de 54,10 € en titre sans risque, la différence correspondant à la valeur du call, soit 6,25 €.

Le prix du call et la valeur du portefeuille de couverture sont représentées ci-dessous. La relation entre le prix du call et le prix de l'actif sous-jacent n'est pas linéaire (cette non-linéarité est liée à la non-linéarité du pay-off). La fonction du prix du call est convexe. Par construction, la relation entre la valeur du portefeuille de couverture et le prix de l'actif sous-jacent est linéaire. La fonction de la valeur du portefeuille de couverture est une droite de pente Δ . La figure met en évidence l'écart entre la couverture et le produit couvert.



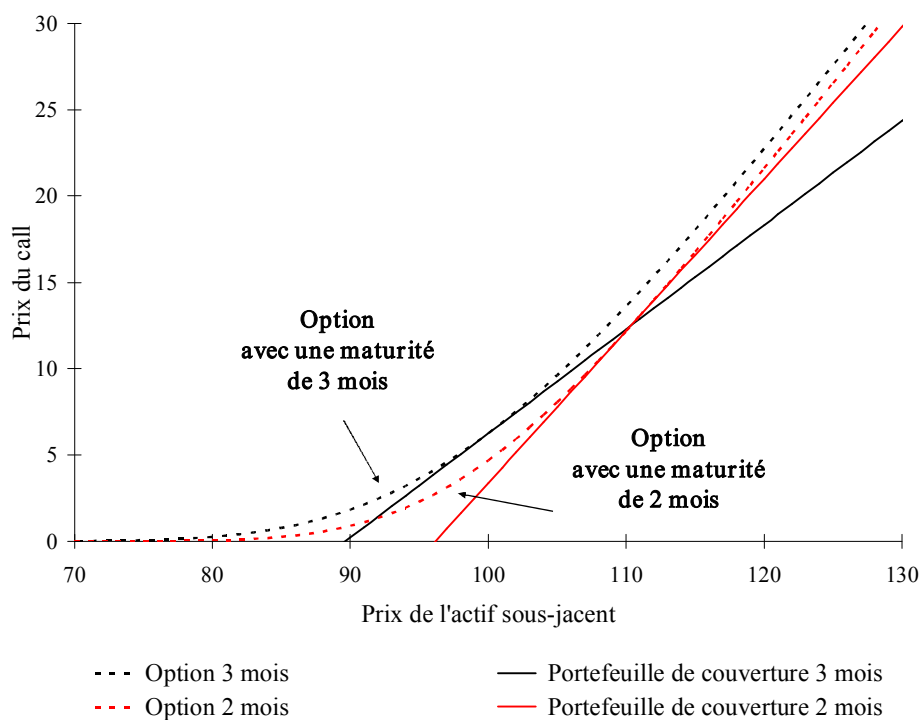
Question 5 : comparer le prix du call et la valeur du portefeuille de couverture du call une semaine après sachant que le prix de l'action est maintenant de 110 € et que les valeurs des autres paramètres sont restées identiques. Expliquer la différence éventuelle. Représenter graphiquement l'évolution au cours du temps de la fonction du prix du call et de la fonction du portefeuille de couverture.

Une semaine après, la valeur du call est de 13,35 €.

La valeur de la partie « Actif sous-jacent » du portefeuille de couverture est de 66,39 € ($=0,6035 \cdot 110$). La valeur de la partie « Titre sans risque » du portefeuille de couverture est de 54,20 € ($=54,10 \cdot (1+0,10 \cdot 1/52)$). La valeur du portefeuille de couverture est donc de 12,19 €.

L'écart de valeur entre le call et le portefeuille de couverture du call s'explique par le fait que

le portefeuille n'a pas été réajusté sur la période. Rappelons que dans le modèle de Black Scholes Merton, le portefeuille est ajusté de manière continue.



Question 6 : rappeler la définition des paramètres de couverture (communément appelés « les grecques »).

Les paramètres de couverture correspondent aux dérivées de la valeur de l'option par rapport aux variables ou paramètres du modèle : le prix de l'actif sous-jacent (le delta et le gamma), le taux d'intérêt sans risque (le rho), la volatilité (le vega) et le temps (le theta). Ils sont définis par les formules suivantes :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}, \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S}, \rho = \frac{\partial C}{\partial r}, \vartheta = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \text{ et } \theta = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Question 7 : vérifier que le signe des grecques est en accord avec les effets des variations des valeurs de paramètres constatés précédemment.

Les grecques représentent la variation du prix du call pour une variation des variables ou des paramètres alors que les sensibilités représentent la variation relative du prix du call pour une variation relative des variables ou des paramètres. Le signe doit donc être le même.

$$\Delta = 0,604 \text{ et } S_s = 10,07\%.$$

$$\theta = -15,05 \text{ et } S_t = -2,60\%$$

$$\rho = 13,52 \text{ et } S_r = 2,18\%$$

$$\vartheta = 19,27 \text{ et } S_\sigma = 15,45\%$$