

# **Formation ESSEC Gestion de patrimoine**

## **Séminaire « Placements financiers »**

### **Présentation des options**

# Plan

- **Les options standards (options de 1<sup>ère</sup> génération)**
  - ❖ Les produits de base : *calls* et *puts*
  - ❖ Fonction *pay-off* et fonction de profit et de perte
  - ❖ Utilisation : couverture et spéculation
- **Les options exotiques (options de 2<sup>ème</sup> génération)**
  - ❖ Options sur un seul actif sous-jacent avec des fonctions *pay-off* complexes
  - ❖ Options sur plusieurs actifs sous-jacents
- **Utilisation d'un *pricer*: [www.longin.fr](http://www.longin.fr)**
  - ❖ Calcul du prix d'une option
  - ❖ Calcul de la volatilité implicite

# Objectifs d'apprentissage

- **Après avoir suivi cette partie sur les options, vous devez être capable de :**
  - ❖ Utiliser un *pricer* d'options pour calculer le prix d'une option
  - ❖ Evaluer la marge prise par une institution financière
  - ❖ Construire une stratégie de couverture pour une position simple
  - ❖ Définir une stratégie d'investissement en fonction d'anticipations de marché données

# Intentions pédagogiques

- **Pendant cette partie sur les options, l'intervenant insistera sur les messages suivants :**
  - ❖ L'importance de la couverture
  - ❖ L'effet de levier (financier) lié aux options
  - ❖ La volatilité (le risque) : un actif en tant que tel
  - ❖ La différence entre la volatilité historique et la volatilité implicite
  - ❖ L'utilisation des modèles en pratique : *mapping* ou *pricing*

# Produits dérivés

- **Les options sont des produits dérivés.**
  - ❖ Un produit dérivé est un produit dont la valeur est obtenue (dérivée) de la valeur d'un autre produit (appelé actif sous-jacent).
- **Exemples de produits dérivés**
  - ❖ Les contrats à terme
  - ❖ Les options

# Options standards

- **Deux types d'options : les *calls* et les *puts***
  - ❖ Les options d'achat (*call options*) : le droit (mais non l'obligation) d'acheter un actif à une date donnée ou pendant une période donnée à un prix donné (*strike price*).
  - ❖ Les options de vente (*put options*) : le droit (mais non l'obligation) de vendre un actif à une date donnée (ou pendant une période donnée) à un prix donné.
- **Les *calls* et les *puts* peuvent être émis (sur le marché primaire), exercés et achetés ou vendus (sur le marché secondaire).**
- **Exemples :**
  - ❖ Bons de souscription d'action (BSA) émis par les entreprises (sur ses propres actions), *stock options* émises par les entreprises, options négociables échangées sur les bourses et les warrants émis par les institutions financières (sur divers actifs sous-jacents)

# Principales caractéristiques des options

- **Caractéristiques d'un contrat d'option**

- ❖ L'actif sous-jacent : action, panier d'actions, indice d'actions, obligation, indice d'obligations, taux d'intérêt, fonds, matière première, produit agricole, taux de change, or, etc.
- ❖ Le prix d'exercice (*strike price* ou *strike*)
- ❖ La maturité
- ❖ Le type d'exercice : européen, américain ou bermudien
- ❖ Le mode de livraison (*delivery*) : physique ou monétaire
- ❖ Le prix de l'option : la prime (montant et modalités de paiement)
- ❖ Exercice Internet : visiter le site d'une bourse (CME, CBOT, Liffe, Monep, etc.) et étudier un contrat d'option.

# Le prix d'exercice (1)

- **Fixation du prix d'exercice (à l'émission de l'option)**
  - ❖ Sur les marchés de gré à gré (*over the counter* ou OTC), le prix d'exercice est fixé d'un commun accord entre les parties.
  - ❖ Sur les marchés organisés, les bourses fixent un ensemble de prix d'exercice pour les options cotées selon les conditions de marché (la valeur du sous-jacent à un instant donné).
  - ❖ Exercice Internet : visiter le site d'une bourse (CME, CBOT, Liffe, Monep, etc.) ou d'un courtier en ligne et trouver les prix d'exercice des options actuellement cotées sur les indices d'actions (SP 500, FTSE 100, CAC 40, etc.).
  - ❖ Exercice : pour quel prix d'exercice, la liquidité du marché est-elle la plus élevée ?

# Le prix d'exercice (2)

- **Terminologie**

- ❖ Option à la monnaie : le prix de l'actif sous-jacent est égal au prix d'exercice de l'option.
- ❖ Option dans la monnaie : le prix de l'actif sous-jacent est supérieur au prix d'exercice de l'option pour un *call* et inférieur au prix d'exercice de l'option pour un *put*.
- ❖ Option en dehors de la monnaie : le prix de l'actif sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option pour un *call* et supérieur au prix d'exercice de l'option pour un *put*.

# La maturité des options

- **Fixation de la maturité (à l'émission de l'option)**
  - ❖ Sur les marchés de gré à gré (*over the counter* ou OTC), la maturité est fixée d'un commun accord entre les parties.
  - ❖ Sur les marchés organisés, les bourses fixent un ensemble de maturités pour les options cotées selon l'offre et la demande des intervenants.
  - ❖ Exercice Internet : visiter le site d'une bourse (CME, CBOT, Liffe, Monep, etc.) ou d'un courtier en ligne et trouver la maturité des options actuellement cotées sur les indices d'actions (SP 500, FTSE 100, CAC 40, etc.).
  - ❖ Exercice : quelle est la maturité la plus longue des options cotées sur le marché ? Pour quelle maturité, la liquidité du marché est-elle la plus élevée ?

# Le type d'exercice

- **Option européenne**
  - ❖ Une option européenne ne peut être exercée qu'à maturité.
- **Option américaine**
  - ❖ Une option américaine peut être exercée à n'importe quel moment avant maturité.
  - ❖ Exemple: options traitées sur les marchés organisés (en général).
- **Options bermudéennes**
  - ❖ Une option bermudéenne peut être exercée à certaines dates ou sur certaines périodes avant maturité.
  - ❖ Exemple: *stock options* données par les entreprises à leurs employés.
- **Exercice: ordonner le prix des options selon leur type d'exercice.**

# Fonction *pay-off* pour les options standards (1)

- **Définition**

- ❖ La fonction *pay-off* donne la valeur de l'option à la date de maturité (ou à la date d'exercice) en fonction de le prix de l'actif sous-jacent à cette date. Le *pay-off* représente le flux de trésorerie entre l'émetteur / le vendeur de l'option (décaissement) et l'acheteur (encaissement).

- **Fonction *pay-off* pour les options standards**

- ❖ Pour l'acheteur d'un *call* :

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \quad C_T = \begin{cases} S_T - K & \text{si } S_T \geq K \\ 0 & \text{si } S_T < K \end{cases}$$

- ❖ Pour l'acheteur d'un *put* :

$$P_T = \max(K - S_T, 0) \quad P_T = \begin{cases} K - S_T & \text{si } S_T \leq K \\ 0 & \text{si } S_T > K \end{cases}$$

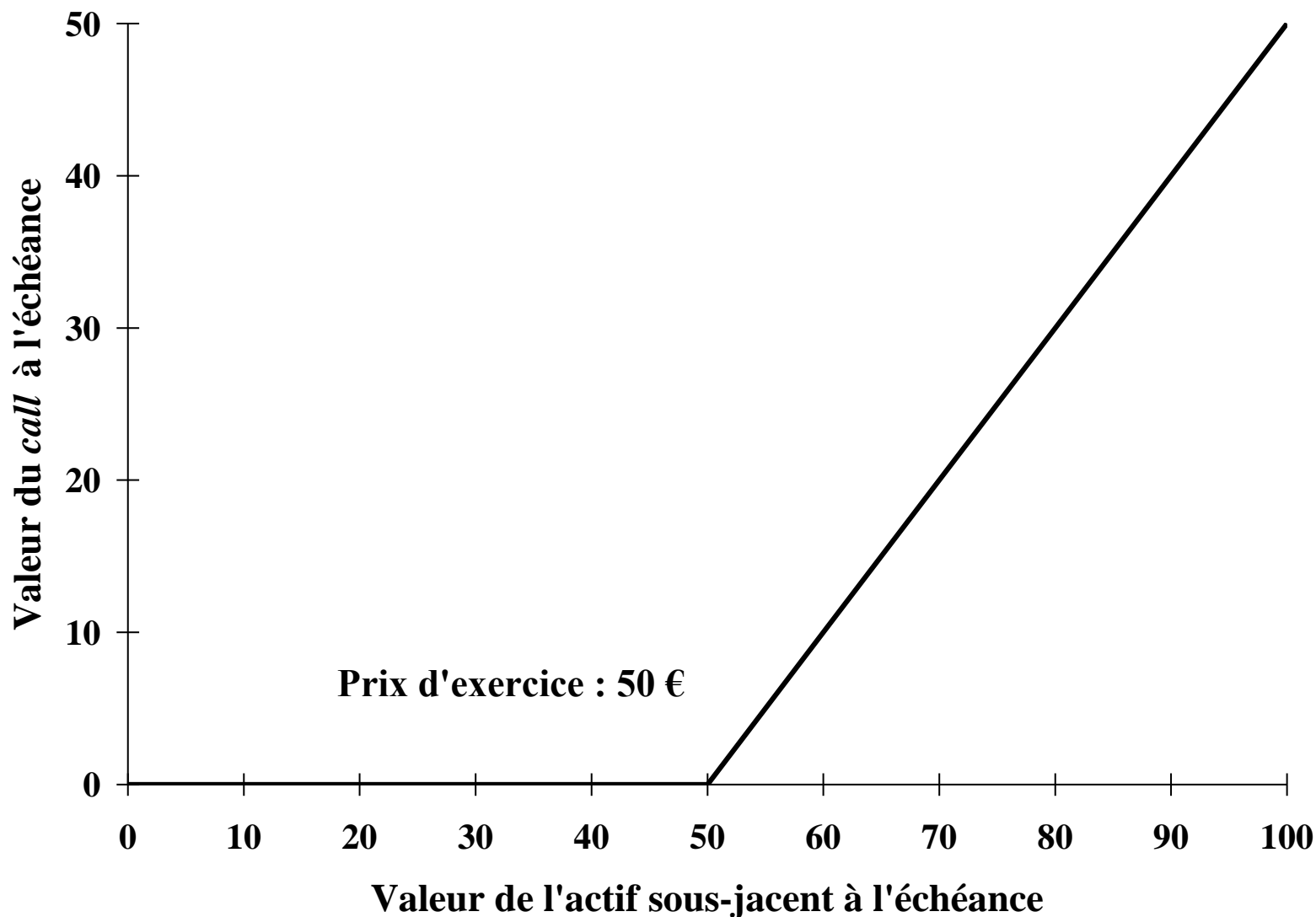
où  $C_T$  et  $P_T$  sont les valeurs d'un *call* et d'un *put* à maturité  $T$ ,  $S_T$  le prix de l'actif sous-jacent et  $K$  le prix d'exercice.

# Fonction *pay-off* pour l'acheteur d'un *call* (1)

- Pour un *call* de prix d'exercice égal à 50 €

Valeur de l'actif sous-jacent à maturité	Valeur du <i>call</i> à maturité	Exercice du <i>call</i>
0	0	Non
10	0	Non
20	0	Non
30	0	Non
40	0	Non
50	0	Oui / Non
60	10	Oui
70	20	Oui
80	30	Oui
90	40	Oui
100	50	Oui

# Fonction *pay-off* pour l'acheteur d'un *call* (2)

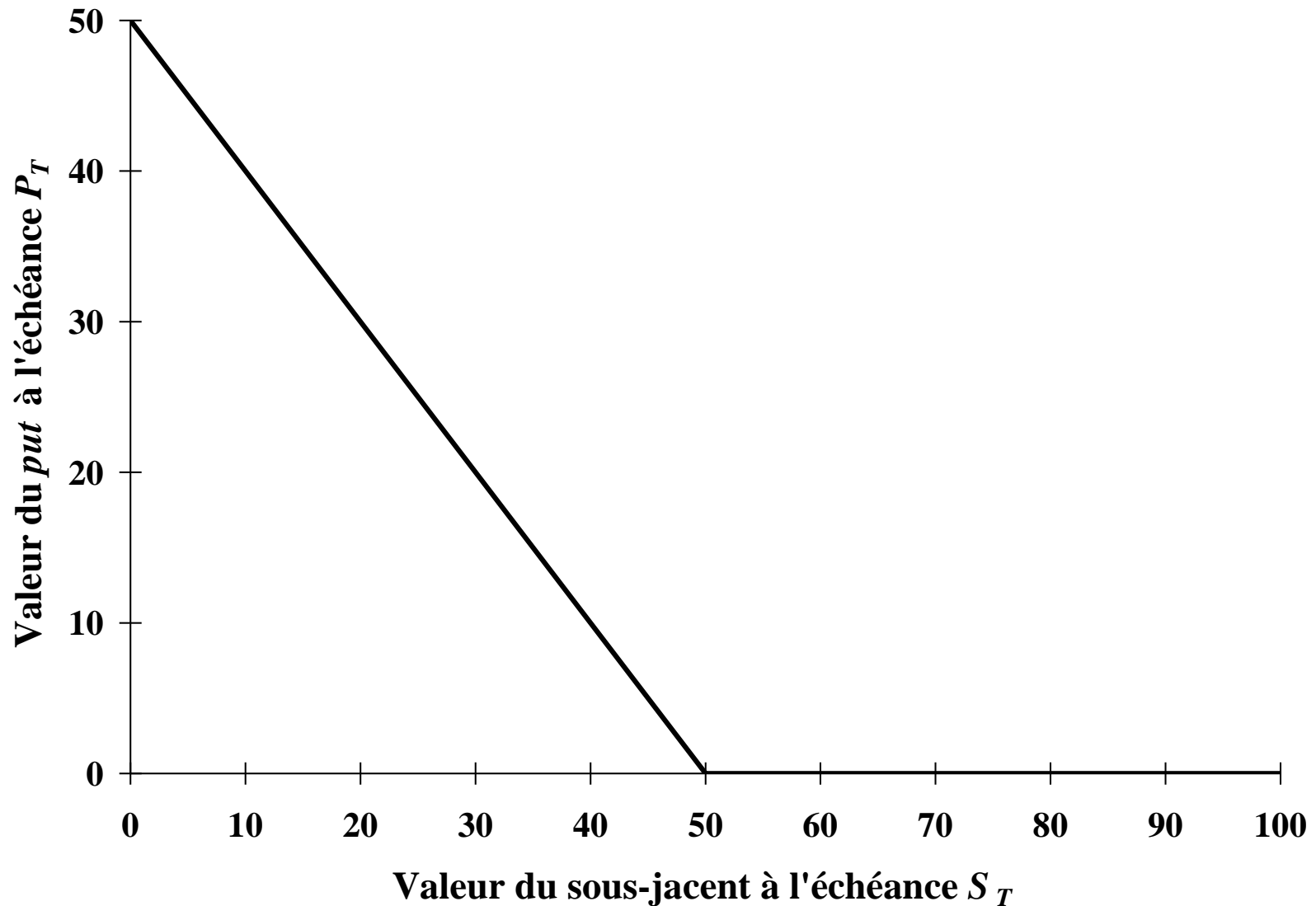


# Fonction *pay-off* pour l'acheteur d'un *put* (1)

- Pour un *put* de prix d'exercice égal à 50 €

Valeur de l'actif sous-jacent à maturité	Valeur du <i>put</i> à maturité	Exercice du <i>put</i>
0	50	Oui
10	40	Oui
20	30	Oui
30	20	Oui
40	10	Oui
50	0	Oui / Non
60	0	Non
70	0	Non
80	0	Non
90	0	Non
100	0	Non

# Fonction *pay-off* pour l'acheteur d'un *put* (2)



# Fonction *pay-off* pour les options standards (2)

- Exercice: calculer la fonction *pay-off* pour le vendeur d'un *call*.
- Exercice: représenter graphiquement la fonction *pay-off* pour le vendeur d'un *call*.
- Exercice: calculer la fonction *pay-off* pour le vendeur d'un *put*.
- Exercice: représenter graphiquement la fonction *pay-off* pour le vendeur d'un *put*.

# Fonction de profit et de perte pour les options standards (1)

- **Définition**

- ❖ La fonction de profit et de perte (“*profit and loss*” or P&L) prend en compte le prix de l’option payé par l’acheteur au vendeur.

- **Fonction de profit et de perte pour les options standards**

- ❖ Pour l’acheteur d’un *call* :

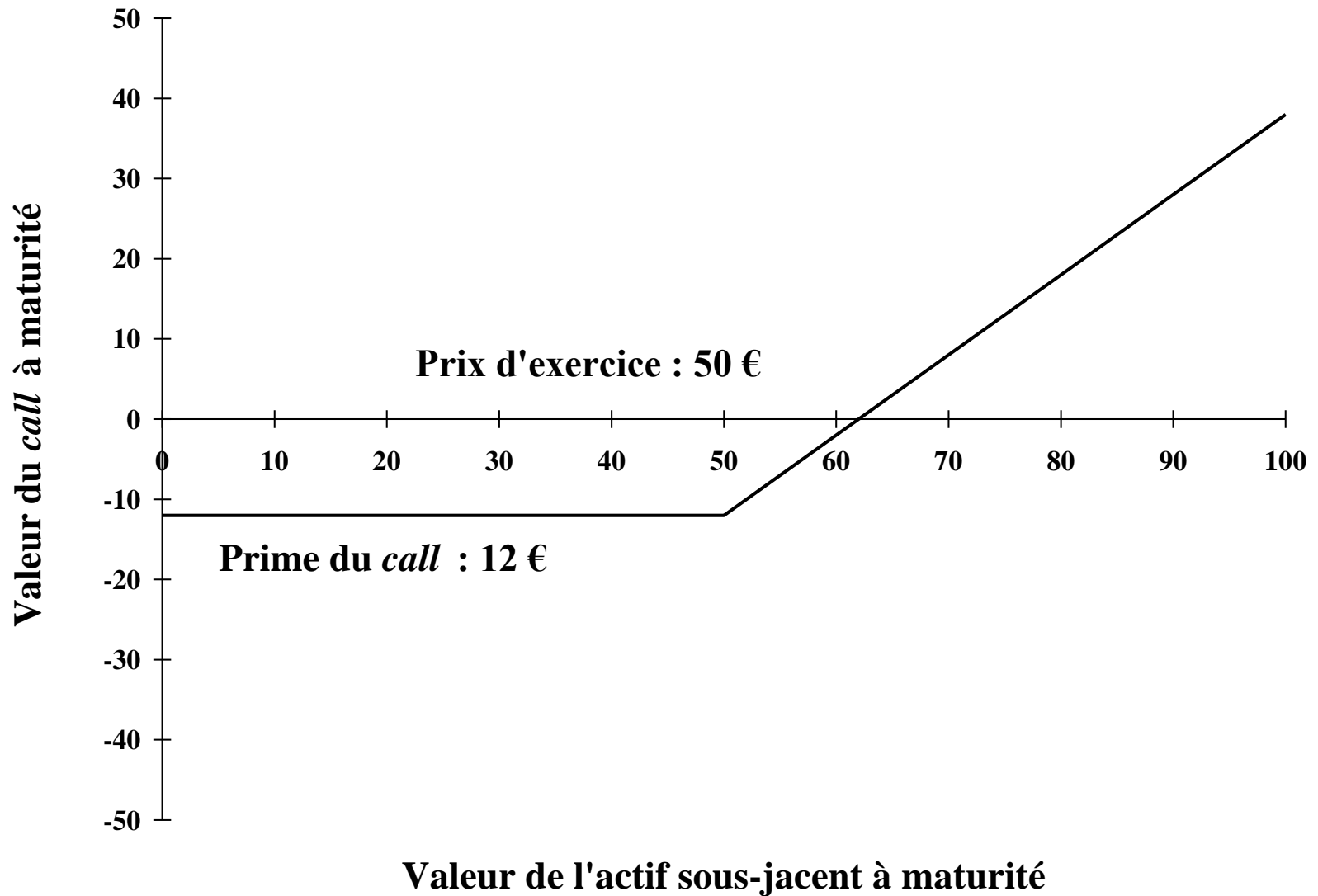
$$C_T - C_0$$

- ❖ Pour l’acheteur d’un *put* :

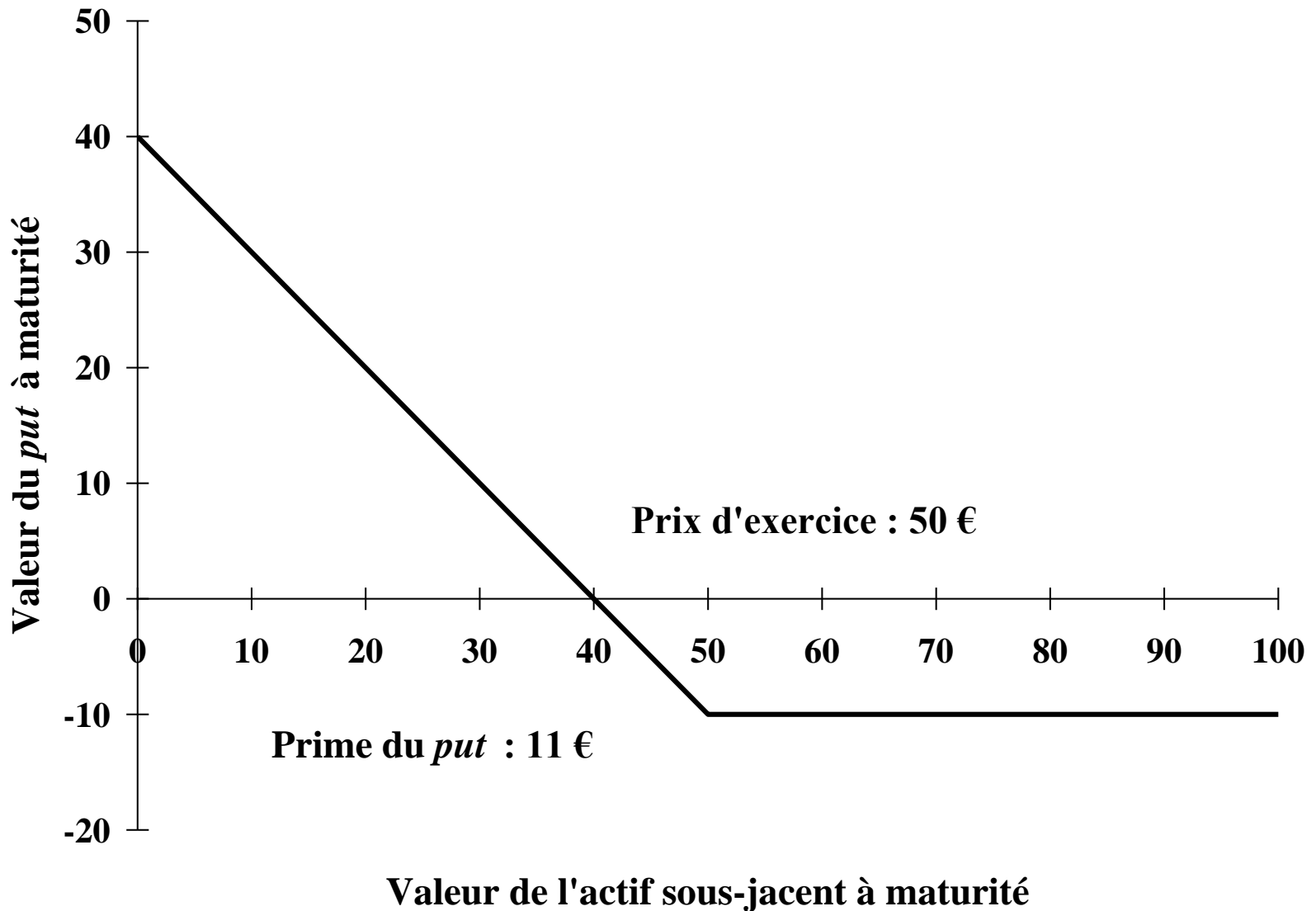
$$P_T - P_0,$$

où  $C_0$  et  $P_0$  représentent la valeur à l’émission (date 0) du *call* et du *put*.

# Fonction de profit et de perte pour un *call*



# Fonction de profit et de perte pour un *put*



# Fonction de profit et de perte pour les options standards (2)

- Exercice: déterminer la perte maximum pour l'acheteur d'un *call*.
- Exercice: déterminer la perte maximum pour le vendeur d'un *call*.
- Exercice: déterminer la perte maximum pour l'acheteur d'un *put*.
- Exercice: déterminer la perte maximum pour le vendeur d'un *put*.

# Evaluation d'options standards (1)

- **Le problème**

- ❖ La valeur d'une option est connue à maturité  $T$ . Elle est donnée par la fonction *pay-off* (contrat).
- ❖ Quelle est la valeur d'une option à une date quelconque  $t$  ( $t < T$ ) ?
- ❖ En particulier, quelle est la valeur de l'option à la date d'émission ( $t = 0$ ) ? Quelle est la prime payée par l'acheteur de l'option au vendeur ?

- **L'approche classique**

- ❖ Jusque dans les années 1970, la méthode consistait à valoriser une option en actualisant ses flux de trésorerie anticipés avec un taux d'actualisation qui prenait en compte le risque de l'option.
- ❖ **Exercice: formaliser l'approche classique pour un *call*.**

# Evaluation d'options standards (2)

- **L'approche par arbitrage (modèle de Black Scholes Merton)**
  - ❖ Sous certaines hypothèses, une position longue dans un *call* (achat) est équivalente à une position longue dans l'actif sous-jacent (achat) et une position courte dans le titre sans risque (emprunt).
  - ❖ Ce portefeuille (appelé portefeuille de couverture ou portefeuille d'arbitrage) permet de répliquer exactement le *pay-off* de l'option à maturité.
  - ❖ En l'absence d'opportunités d'arbitrage, la valeur de l'option est alors égale à la somme des valeurs de ces positions (observables sur le marché).

# La formule de Black Scholes Merton

- **Formule pour un *call***

- ❖ Le prix d'un *call* européen de prix d'exercice  $K$  et de maturité  $T$  à la date  $t$  est donné par:

$$C_t = S_t \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot N(d_2)$$

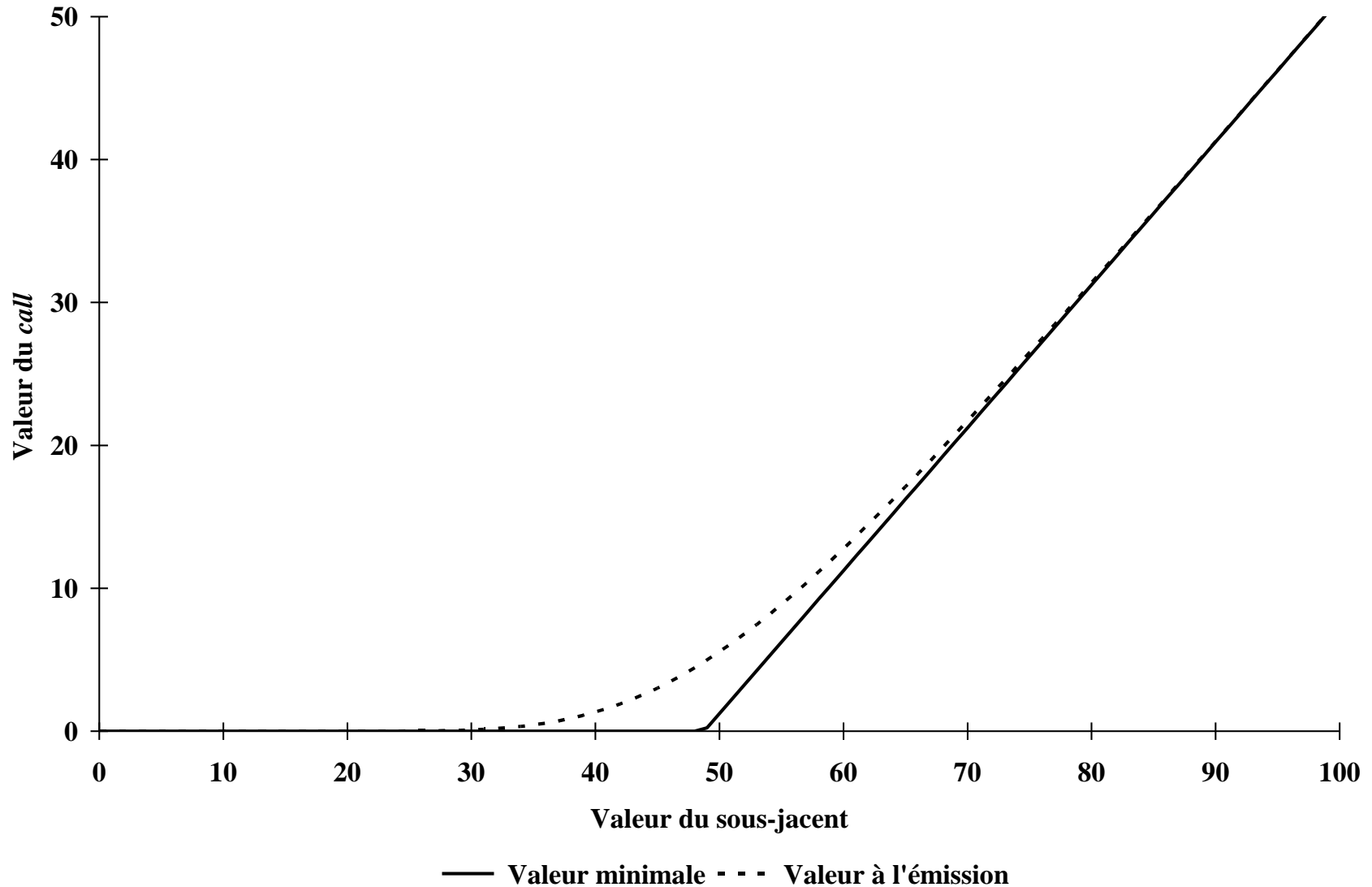
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

où  $\ln$  représente le logarithme népérien et  $N$  la distribution cumulée de la loi normale (loi de Gauss).

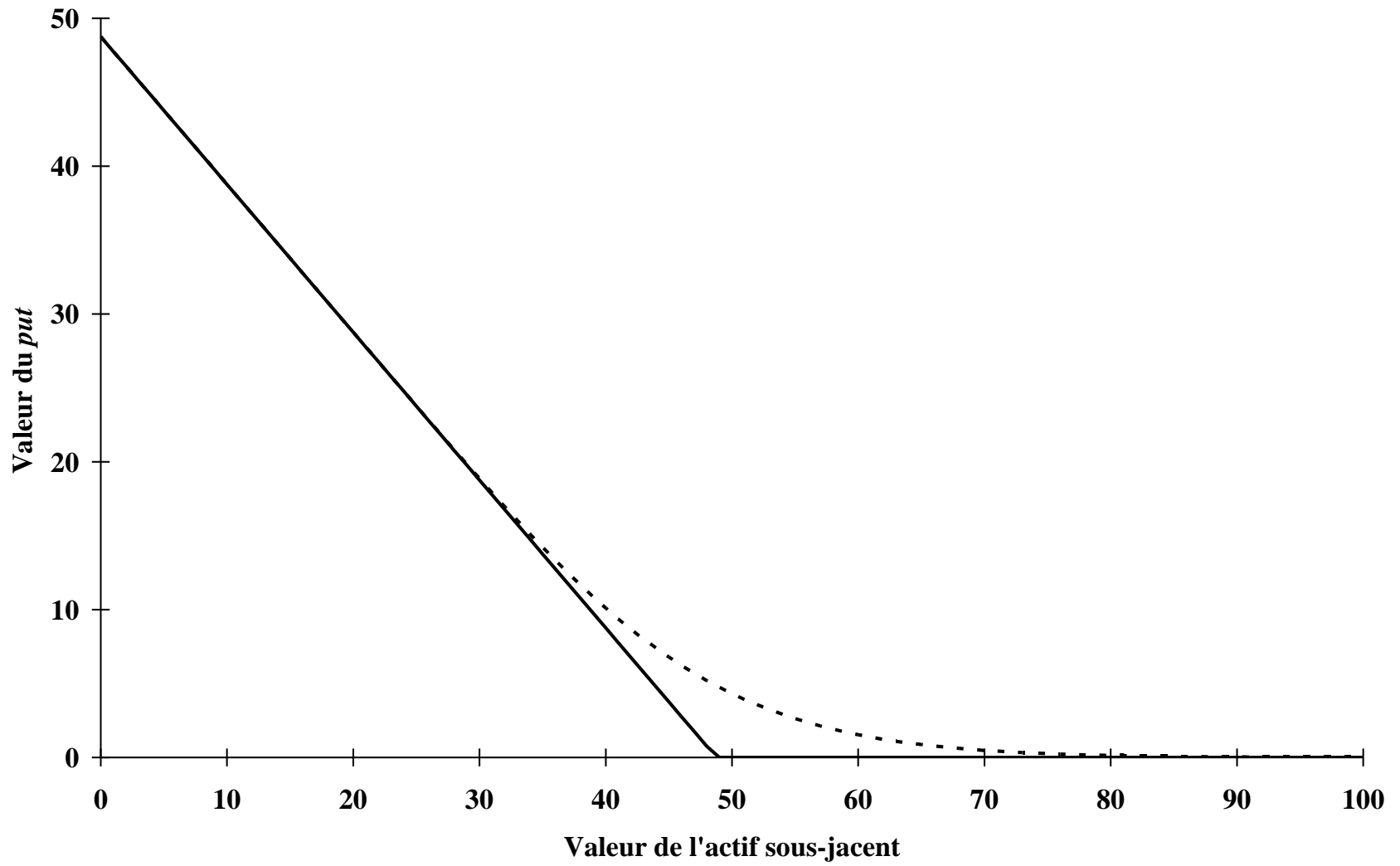
- **Formule pour un *put***

$$P_t = -S_t \cdot N(-d_1) + K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot N(-d_2)$$

# Modèle de Black Scholes Merton: valeur du *call*



# Modèle de Black Scholes Merton: valeur du *put*



— Valeur minimale - - - Valeur à l'émission

# Modèle de Black Scholes Merton : le portefeuille de couverture

- **Décomposition du portefeuille de couverture**

- ❖ A partir de la formule de Black-Scholes-Merton , le portefeuille de couverture peut s'écrire comme suit:

$$C_t = \Delta \cdot S_t - B_t$$

- **Interprétation**

- ❖ Cette expression montre qu'un *call* peut être décomposé comme une position longue sur l'actif sous-jacent (achat de  $\Delta$  actions) et une position courte dans l'actif sans risque (emprunt d'un montant  $B$ ).
- ❖ Cette décomposition illustre le fait qu'un *call* est produit à effet de levier (utilisation d'un emprunt pour acheter des actions)
- ❖ **Exercice : mettre en évidence l'effet de levier lié à un investissement en option. On considérera deux scénarios pour le prix de l'actif sous-jacent : évolution à la hausse et à la baisse.**

# Facteurs influençant la valeur de l'option

- **Paramètres de l'option**

- ❖ Le prix d'exercice de l'option
- ❖ La maturité de l'option
- ❖ Le type d'exercice de l'option

- **Les conditions de marché**

- ❖ Le prix de l'actif sous-jacent
- ❖ Le taux d'intérêt sans risque
- ❖ Les dividendes futurs
- ❖ La volatilité du prix de l'actif sous-jacent

# Analyse du prix d'un *call* et du prix d'un *put*

- **Facteurs influençant le prix d'une option**

- ❖ Prix d'exercice de l'option : 100 €
- ❖ Maturité de l'option : 3 mois
- ❖ Type d'exercice de l'option : européen
- ❖ Prix de l'actif sous-jacent : 100 €
- ❖ Taux d'intérêt sans risque : 5%
- ❖ Dividendes : 3%
- ❖ Volatilité du prix de l'actif sous-jacent : 25%

- **Question : quel est l'impact de ces différents facteurs sur le prix d'un *call* et sur le prix d'un *put* ?**

# Influence du prix d'exercice de l'option

- *Call*

- ❖ Plus le prix d'exercice du *call* est élevé, moins il y a de chances que le *call* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *call* est faible.

Prix d'exercice du <i>call</i>	90	100	110
Prix du <i>call</i>	11,59	5,19	1,78

- *Put*

- ❖ Plus le prix d'exercice du *put* est élevé, plus il y a de chances que le *put* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *put* est élevée.

Prix d'exercice du <i>put</i>	90	100	110
Prix du <i>put</i>	1,22	4,69	11,16

# Influence de la maturité de l'option

- *Call*

- ❖ Plus la maturité du *call* est élevée, plus il y a de chances que le *call* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *call* est élevée.

Maturité du <i>call</i>	1 mois	3 mois	6 mois
Prix du <i>call</i>	2,95	5,19	7,40

- ❖ Vrai pour les options américaines ou européennes de maturité courte ou moyenne

- *Put*

- ❖ Plus la maturité du *put* est élevée, plus il y a de chances que le *put* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *put* est élevée.

Maturité du <i>put</i>	1 mois	3 mois	6 mois
Prix du <i>put</i>	2,79	4,69	6,42

# Influence du type d'exercice de l'option

- **Call**

- ❖ Comme l'acheteur d'un *call* américain peut exercer son option à tout instant, alors que l'acheteur d'un *call* européen ne peut exercer son option qu'à maturité, le prix d'un *call* américain est supérieur ou égal au prix d'un *call* européen.

Type d'exercice du <i>call</i>	Européen	Américain
Prix du <i>call</i>	5,19	5,19

- **Put**

- ❖ Comme l'acheteur d'un *put* américain peut exercer son option à tout instant, alors que l'acheteur d'un *put* européen ne peut exercer son option qu'à maturité, le prix d'un *put* américain est supérieur ou égal au prix d'un *put* européen.

Type d'exercice du <i>put</i>	Européen	Américain
Prix du <i>put</i>	4,69	4,69

# Influence du prix de l'actif sous-jacent

- *Call*

- ❖ Plus le prix de l'actif sous-jacent est élevé, plus il y a de chances que le *call* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *call* est élevée.

Prix de l'actif sous-jacent	90	100	110
Prix du <i>call</i>	1,40	5,19	11,97

- *Put*

- ❖ Plus le prix de l'actif sous-jacent est élevé, moins il y a de chances que le *put* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *put* est faible.

Prix de l'actif sous-jacent	90	100	110
Prix du <i>put</i>	10,83	4,69	1,55

# Influence du taux d'intérêt sans risque

- **Call**

- ❖ Plus le taux d'intérêt sans risque est élevé, plus la tendance du prix de l'action est haussière, et plus il y a de chances que le *call* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *call* est élevée.

Taux d'intérêt sans risque	3%	5%	10%
Prix du <i>call</i>	4,95	5,19	5,81

- **Put**

- ❖ Plus le taux d'intérêt sans risque est élevé, plus la tendance du prix de l'action est haussière, et moins il y a de chances que le *put* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *put* est élevée.

Taux d'intérêt sans risque	3%	5%	10%
Prix du <i>put</i>	4,95	4,69	4,09

# Influence des dividendes versés

- *Call*

- ❖ Plus les dividendes (versés pendant la vie de l'option) sont élevés, plus le prix de l'action à l'échéance sera faible, et moins il y a de chances que le *call* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *call* est faible.

Taux de dividende	0%	3%	5%
Prix du <i>call</i>	5,60	5,19	4,92

- *Put*

- ❖ Plus les dividendes (versés pendant la vie de l'option) sont élevés, plus le prix de l'action à l'échéance sera faible, et plus il y a de chances que le *put* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *put* est élevée.

Taux de dividende	0%	3%	5%
Prix du <i>put</i>	4,36	4,69	4,92

# Influence de la volatilité du prix de l'action

- *Call*

- ❖ Plus la volatilité de l'actif sous-jacent est élevée, plus il y a de chances que le *call* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *call* est élevée.

Volatilité du prix de l'action	10%	25%	50%
Prix du <i>call</i>	2,23	5,19	10,10

- *Put*

- ❖ Plus la volatilité de l'actif sous-jacent est élevée, plus il y a de chances que le *put* finisse dans la monnaie et donc plus la valeur du *put* est élevée.

Volatilité du prix de l'action	10%	25%	50%
Prix du <i>put</i>	1,74	4,69	9,60

# Définition des sensibilités (les Grecques)

- **Sensibilité au prix de l'actif sous-jacent : le delta et le gamma**

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \quad \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S}$$

- ❖ Le delta et le gamma représentent la première et la deuxième dérivée de la valeur du *call* par rapport au prix de l'actif sous-jacent.

- **Sensibilité au taux sans risque : le rho**  $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$

- **Sensibilité à la volatilité du prix de l'actif sous-jacent : le vega**  $v = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$

- **Sensibilité au passage du temps : le theta**  $\theta = -\frac{\partial C}{\partial t}$

- **Sensibilité au taux de dividende : l'épsilon**  $\varepsilon = \frac{\partial C}{\partial q}$

# Calcul des sensibilités (les grecques)

- **Modèle de Black Scholes Merton (temps continu)**

- ❖ Les sensibilités de la valeur du *call* aux différentes variables et paramètres du modèle peuvent être calculées analytiquement.

- **Méthode binomial et méthode de simulation de Monte Carlo (temps discret)**

- ❖ Les sensibilités de la valeur du *call* aux différentes variables et paramètres du modèle sont calculées par différence finie.

- *La valeur de l'option est recalculée en changeant la variable par rapport à la quelle on calcule la sensibilité.*

- *Exemple: calcul du delta:*

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \approx \frac{C(S_t + \varepsilon) - C(S_t)}{\varepsilon}$$

*où  $\varepsilon$  correspond à une petite variation du prix de l'actif sous-jacent.*

# Volatilité implicite (1)

- **Les options standards écrites sur des actifs sous-jacents classiques (indices d'actions, actions liquides, taux de change des principales devises, etc.) sont traitées sur les marchés financiers. Leur prix est la résultante de la confrontation de l'offre et de la demande.**
- **Utilisation de la formule de Black Scholes Merton**
  - ❖ Pour les options dont le prix est fourni par le marché, la formule de Black Scholes Merton n'est pas utilisée comme une formule de pricing (pour obtenir le prix à partir d'une volatilité donnée) mais comme une formule de mapping (pour obtenir la volatilité implicite à partir du prix de marché de l'option).
  - ❖ Il y a une relation bijective entre le prix de l'option et la volatilité de l'actif sous-jacent.
- **La volatilité ainsi calculée est appelée “volatilité implicite”.**
- **La volatilité implicite est la volatilité anticipée par le marché sur la période de l'option.**

# Volatilité implicite (2)

- **Faits stylisés sur la volatilité implicite**

- ❖ Pour des options sur le même actif sous-jacent, la volatilité implicite n'est pas constante :
  - *La volatilité implicite varie au cours du temps.*
  - *La volatilité implicite dépend du prix d'exercice et de la maturité de l'option (effet « smile », « skew » et « smirk »)*
  - *Courbe / surface de volatilité implicite*

# Volatilité (1)

- **Pour des options pour lesquelles il n'y a pas de prix de marché (sous-jacent exotique, maturité longue), le prix des options doit être déterminé à partir d'un modèle.**
- **Utilisation de la formule de Black Scholes Merton**
  - ❖ La formule de Black Scholes Merton peut être utilisée comme une formule de *pricing* pour obtenir le prix de l'option à partir de la volatilité.
- **La volatilité de l'actif sous-jacent doit être estimée à l'aide d'un modèle statistique.**
  - ❖ Quelques modèles classiques :
    - *Volatilité historique*
    - *Processus ARCH*

# Volatilité (2)

- **Faits stylisés sur la volatilité (observée)**

- ❖ Pour tous les actifs financiers, la volatilité des prix (ou des taux) n'est pas constante au cours du temps.
- ❖ Il y a des périodes de forte volatilité et des périodes de faible volatilité.
- ❖ Après un grand choc, il y a plus de chances d'observer un grand choc qu'un petit choc. Après un petit choc, il y a plus de chances d'observer un petit choc qu'un grand choc.