

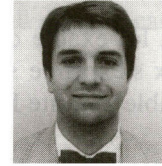
Application de la théorie des valeurs extrêmes aux marchés financiers



Jean-François Boulier
Directeur de la recherche
et de l'innovation
CCF



Richard Dalaud
Ingénieur financier
Direction de la recherche
et de l'innovation
CCF



François Longin
Professeur de finance
ESSEC

Cet article présente de nouveaux résultats empiriques concernant les fortes variations de prix d'actifs financiers et de taux d'intérêt. Alors que les études précédentes se sont surtout concentrées sur le marché des actions et sur les États-Unis, cet article a pour but d'élargir notre connaissance à la France et à d'autres marchés. La méthode utilise des résultats statistiques concernant les extrêmes d'un processus aléatoire et en particulier le théorème des valeurs extrêmes qui caractérise la distribution du terme maximal et du terme minimal d'un processus. Nous utilisons les résultats sur les extrêmes dans le cadre de la réglementation sur les risques de marché pour les institutions financières. Ainsi, nous calculons la charge en fonds propres exigée pour une probabilité fixée, et inversement, nous quantifions la probabilité attachée à une charge en fonds propres donnée.

Cet article est organisé de la façon suivante : la théorie des valeurs extrêmes est présentée dans la partie **I** et les résultats empiriques en **II** : indice SBF 240 d'actions françaises, quelques titres individuels cotés à la Bourse de Paris, et taux d'intérêt. La partie **III** discute d'une application de la théorie des valeurs extrêmes pour les banques : le calcul de la *value at risk* et de la charge en fonds propres pour couvrir les risques de marché des institutions financières. La **conclusion** rappelle l'importance des valeurs extrêmes en finance et présente des extensions de la recherche exposée dans cet article.

Nous remercions Rémi Bourette, Olivier Cohen, Patrice Poncet ainsi qu'un rapporteur anonyme pour leurs commentaires.
François Longin remercie le CERESSEC pour son support financier.

I Présentation de la théorie des valeurs extrêmes

Cette partie présente des résultats statistiques concernant la loi des observations extrêmes d'une série aléatoire. Le théorème de base pour un processus dont les variables sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) est exposé tandis que de nouvelles avancées concernant les processus conditionnels sont aussi discutées (1).

1. Résultats exacts

Cette sous-partie présente quelques résultats statistiques exacts sur les extrêmes. Le phénomène observé est mesuré par une variable aléatoire notée r . En pratique, le phénomène est la fluctuation de la valeur d'une position et la variable aléatoire r représente la rentabilité de cette position calculée pour une fréquence donnée (selon l'horizon souhaité, on pourra considérer des rentabilités journalières, hebdomadaires, mensuelles...). Notons F_r la fonction de répartition associée à la variable aléatoire r et (l, u) son support. Soient r_1, r_2, \dots, r_n , n variables aléatoires mesurant l'événement aux instants $1, 2, \dots, n$. Les extrêmes sont définis comme les maxima et les minima des n variables aléatoires r_1, r_2, \dots, r_n . Le maximum noté Y_n correspond à la plus haute rentabilité observée sur les périodes $1, 2, \dots, n$; de même, le minimum, Z_n , correspond à la plus basse rentabilité. Si les variables parentes r_1, r_2, \dots, r_n sont statistiquement indépendantes et de même loi (hypothèse F_{z_n} de la marche aléatoire), la loi exacte du minimum

notée évaluée au point x s'exprime simplement en fonction de la loi de la variable parente F_r :

$$1 - F_{Z_n}(x) = [1 - F_r(x)]^n \quad [1]$$

Cette formule exprime que la probabilité p^{ext} d'observer un mouvement extrême du marché d'amplitude supérieure à x est égale à la probabilité p d'observer un mouvement du marché sur une période de base d'amplitude supérieure à x , à la puissance n ; autrement dit, les deux probabilités sont aussi reliées par la formule : $p^{\text{ext}} = p^n$.

De même, la loi exacte du maximum notée F_{Y_n} évaluée au point x s'exprime simplement en fonction de la loi de la variable parente F_r :

$$F_{Y_n}(x) = [F_r(x)]^n \quad [2]$$

Cette formule exprime que la probabilité p^{ext} d'observer un mouvement extrême du marché d'amplitude inférieure à x est égale à la probabilité p d'observer un mouvement du marché sur une période de base d'amplitude inférieure à x , à la puissance n ; autrement dit, les deux probabilités sont reliées par la formule : $p^{\text{ext}} = p^n$. Notons que cette formule est identique à celle obtenue précédemment pour le minimum car les probabilités considérées dans les deux cas concernent des événements différents : $Z_n \geq x$ (dépassement du seuil x) et $Y_n \leq x$ (non-dépassement du seuil x) (2).

La loi du maximum dépend essentiellement des propriétés de la loi de la variable parente pour de grandes valeurs de x . En effet, pour de faibles valeurs de x , l'influence de $F_r(x)$ décroît rapidement avec n . De la formule [2], on déduit que la loi limite de Y_n , obtenue en faisant tendre n vers l'infini, est nulle pour les valeurs de x inférieures à la borne supérieure du support de la loi de r , u , et égale à l'unité pour les valeurs de x plus grandes que u . C'est donc une loi dégénérée.

Les formules exactes de la loi du maximum et de sa loi limite ne sont cependant pas très intéressantes. En pratique, la loi de la variable parente (la rentabilité calculée pour une fréquence donnée comme la journée, la semaine ou le mois) n'est pas connue avec précision. En effet, il n'existe ni théorie statistique, ni théorie financière, ni modèle économique qui spécifie la loi statistique des rentabilités de manière convaincante. De ce fait, si cette loi n'est pas connue, la loi exacte du maximum ne l'est pas non plus. Pour cette raison, le comportement asymptotique du maximum Y_n est étudié.

2. Un résultat limite : le théorème des valeurs extrêmes

Tiago de Oliveira (1973) a écrit, «*Puisque, en général, nous avons des échantillons suffisamment larges, il est naturel et en général suffisant pour des raisons pratiques de trouver des lois limites pour le maxi-*

um ou le minimum convenablement réduits et de les utiliser.» Pour trouver une loi limite d'intérêt, la variable aléatoire Y_n est transformée de telle sorte que la loi limite de la nouvelle variable ne soit pas dégénérée. La transformation la plus simple est l'opération de standardisation. La variable Y_n est ajustée avec un paramètre d'échelle α_n (supposé positif) et un paramètre de localisation β_n . Dans le reste de l'étude, l'existence d'une séquence de tels coefficients ($\alpha_n > 0$, β_n) est supposée. Le théorème des valeurs extrêmes spécifie la forme de la loi limite lorsque la variable n tend vers l'infini. Bien que le résultat du théorème reste vrai sous des hypothèses moins restrictives (I. 3.), le théorème de base peut être obtenu à partir des quatre hypothèses suivantes :

H1. Les variables r_1, r_2, \dots, r_n sont des variables aléatoires.

H2. Les variables r_1, r_2, \dots, r_n sont statistiquement indépendantes.

H3. Les variables r_1, r_2, \dots, r_n sont tirées de la même loi.

H4. Il existe une séquence de coefficients de standardisation ($\alpha_n > 0$, β_n) telle que la loi limite F_Y de la variable réduite $(Y_n - \beta_n)/\alpha_n$ ne soit pas dégénérée.

Le théorème des valeurs extrêmes exposé dans sa version finale par Gnedenko (1943) donne la forme de la loi limite F_Y dont l'expression la plus générale est due à Jenkinson (1955) :

$$F_{Y_n}(y) = \exp \left[-(1 - \tau \cdot y)^{\frac{1}{\tau}} \right] \quad [3]$$

pour $y > \tau^{-1}$ si $\tau < 0$
pour $y < \tau^{-1}$ si $\tau > 0$

Selon la valeur du paramètre τ , la loi des extrêmes peut être réécrite comme suit :

- Loi de Gumbel (type I)

$$F_Y(y) = \exp(-e^{-y}) \text{ pour } y \in \mathbb{R} \quad [4]$$

- Loi de Fréchet (type II)

$$F_Y(y) = 0 \text{ pour } y \leq 0$$

$$= \exp(-y^{-k}) \text{ pour } y > 0 (k > 0) \quad [5]$$

- Loi de Weibull (type III)

$$F_Y(y) = \exp(-(-y)^{-k}) \text{ pour } y \leq 0 (k < 0)$$

$$= 1 \text{ pour } y \geq 0 \quad [6]$$

Le paramètre τ , appelé indice de queue, détermine le type de loi : $\tau < 0$ correspond au type II, $\tau > 0$ au type III, et le cas limite $\tau = 0$ correspond au type I, $(1 - \tau \cdot y)^{1/\tau}$ étant interprété comme e^{-y} . La loi de Gumbel peut être considérée comme une loi de transition entre les lois de Fréchet et de Weibull.

Le paramètre k , appelé paramètre de forme, reflète le poids de la queue de la distribution de la variable parente. L'indice de queue et le paramètre de forme sont liés par la formule : $\tau = -1/k$. La queue de la

distribution F_r est soit décroissante de façon exponentielle (type I), soit décroissante comme une fonction puissance (type II), soit bornée (type III). Dans le premier et le troisième cas, tous les moments de la loi de r sont bien définis. Dans le deuxième cas, la loi de r présente des queues épaisses (*fat-tailed distribution* en anglais) comme pour les lois de Student et les lois Pareto-stables (Boulier, De Drouas et De Vitry (1988) et Gamrowski (1996)) ; le paramètre de forme k est alors égal à l'ordre du moment maximal. Les moments d'ordre r plus grands que k sont infinis et les moments d'ordre r plus petits que k sont finis. Par exemple, si k est plus grand que l'unité, alors la moyenne des rentabilités existe ; si k est plus grand que deux, alors la variance est finie, si k est plus grand que trois, alors la *skewness* est définie et ainsi de suite. Plus la valeur du paramètre k est petite, plus la queue de la distribution de r est épaisse. Le paramètre de forme est un paramètre intrinsèque du processus de rentabilités et ne dépend pas du nombre de rentabilités parmi lesquelles la rentabilité maximale est sélectionnée. Les paramètres d'échelle α_n et de localisation β_n dépendent de la longueur de la période de sélection, n , et représentent respectivement la dispersion et la taille «moyenne» des extrêmes (le paramètre de localisation β_n tend asymptotiquement vers la valeur modale de la distribution). Le paramètre de forme k et les coefficients de standardisation α_n et β_n peuvent être différents pour les lois du maximum et du minimum.

Le théorème des valeurs extrêmes donne un résultat intéressant car il est d'une portée générale : quelle que soit la loi de la variable parente, la loi limite des extrêmes a toujours la même forme. Les lois des extrêmes pour deux processus parents différents se différencient par les valeurs de l'indice de queue et des paramètres d'échelle et de localisation.

3. Extensions du théorème de base

La version du théorème des valeurs extrêmes présentée ci-dessus repose sur quatre hypothèses de base. Le même résultat concernant la forme de la loi est obtenu si l'on relâche ces hypothèses. Citons quelques extensions du théorème. Berman (1964) montre que le résultat tient toujours si les variables sont corrélées, la série des coefficients de corrélation au carré étant convergente. De Haan, Resnick, Rootzèn et De Vries (1989) montrent que si le processus suivi par r est un processus Arch, alors la variable Y_n est du type II, l'indice de queue vérifiant : $-0.5 < \tau < 0$. D'après Leadbetter, Lindgren et Rootzèn (1983), un mélange de variables normales produit une loi limite du type I. Ces extensions montrent que les hypothèses d'indépendance et d'identité de la loi parente ne sont pas cruciales.

Notons enfin les similarités entre le théorème des valeurs extrêmes exposé ci-dessus et un théorème beaucoup plus connu : le théorème central limite. Ce dernier s'intéresse au comportement de la somme S_n

des n variables aléatoires r_1, r_2, \dots, r_n du processus, définie par : $S_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n$, alors que le théorème des valeurs extrêmes s'intéresse au maximum et au minimum du processus. Les deux théorèmes sont asymptotiques par nature dans le sens où ils considèrent le comportement de ces variables quand le paramètre n tend vers l'infini. Les deux théorèmes s'appuient sur les mêmes hypothèses et donnent des résultats similaires : la loi limite de la variable standardisée qui est la loi normale ou une loi de Pareto Lévy dans le cas du théorème central limite, et la loi de Gumbel, la loi de Fréchet ou la loi de Weibull dans le cas du théorème des valeurs extrêmes.

II Résultats empiriques

La théorie est maintenant appliquée à différentes séries temporelles financières : taux de rentabilité de l'indice SBF 240 d'actions françaises, taux de rentabilité de quelques titres individuels cotés à la Bourse de Paris et variations de taux d'intérêt au jour le jour en France.

I. Actions

A. Indice SBF 240 d'actions françaises

La loi asymptotique des valeurs extrêmes est estimée pour les rentabilités journalières minimales et maximales de l'indice SBF 240 (base de données du Crédit commercial de France) sur la période allant de janvier 1976 à décembre 1993 comprenant 4 437 observations. Différentes méthodes d'estimation sont utilisées : la méthode paramétrique du maximum de vraisemblance qui permet d'estimer les trois paramètres de la loi asymptotique des rentabilités extrêmes et la méthode non paramétrique développée par Hill (1975) qui permet d'estimer l'indice de queue uniquement (3). La méthode du maximum de vraisemblance donne des estimations non biaisées et de variance minimum pour les trois paramètres ; elle utilise les rentabilités extrêmes observées sur des périodes ne se recouvrant pas comme définies dans la section précédente. La méthode de Hill (1975) utilise les observations se trouvant dans les queues de la distribution des rentabilités ; elle donne un estimateur plus efficace que celui du maximum de vraisemblance (en fait, l'information du processus prise en compte n'est pas la même : certaines rentabilités extrêmes n'appartiennent pas aux queues de la distribution et réciproquement, certaines observations de queues ne correspondent pas à des rentabilités extrêmes).

Les résultats empiriques sont reproduits dans le tableau ① pour les rentabilités minimales et maximales de l'indice SBF 240. La longueur de la période de sélection varie de 1 mois à 1 an, la valeur du paramètre n augmentant de 21 à 250 et corrélativement, le nombre

d'extrêmes obtenus N baissant de 211 à 17 (la valeur de N est égale à la partie entière N^{obs}/n , où N^{obs} représente le nombre d'observations de la base de données). Les paramètres sont estimés pour les lois de Gumbel et de Fréchet. Par exemple, pour les rentabilités minimales et la loi de Fréchet (1A), le paramètre d'échelle croît avec la longueur de la période de sélection (paramètre n) : sa valeur passe de 0,64 à 1,56. Cela signifie que la distribution des rentabilités minimales est de plus en plus dispersée lorsque l'on considère des extrêmes sélectionnés sur des périodes de plus en plus longues. Le paramètre de localisation croît aussi (en valeur absolue) : sa valeur passe de -1,25 à -3,29. Cela signifie que la distribution des rentabilités minimales se déplace vers la gauche (l'amplitude des extrêmes sélectionnés sur des périodes de plus en plus longues est de plus en plus grande puisque $Z_{n'} \leq Z_n$ et $Y_{n'} \geq Y_n$ pour $n' > n$). Enfin, l'indice de queue τ semble stable : sa valeur varie entre -0,29 et -0,39 sans comportement particulier. Comme le prévoit la théorie, la queue de la distribution tend à ne pas varier avec la longueur de la période de la sélection. L'estimateur non-paramétrique

de Hill (1975) donne une valeur voisine de celles obtenues avec l'estimateur du maximum de vraisemblance : -0,34 pour la queue gauche avec un écart-type de 0,04. Des conclusions similaires s'appliquent aux rentabilités maximales (1B).

Un test de ratio de vraisemblance permet de distinguer entre la loi de Gumbel et la loi de Fréchet. Ces deux lois correspondent aux valeurs d'indices de queue suivantes : $\tau = 0$ et $\tau < 0$. Le test est asymptotiquement distribué comme un chi-deux à un degré de liberté. Dans tous les cas, le test rejette la loi de Gumbel (et a fortiori la loi de Weibull) en faveur de la loi de Fréchet (cf. colonne «Test Gumbel vs Fréchet» des tableaux 1A et 1B).

Comme la théorie des valeurs extrêmes est asymptotique, il faut vérifier que la longueur considérée est suffisamment longue pour pouvoir remplacer en toute sécurité la loi des rentabilités extrêmes par leur loi asymptotique. Sherman (1957) propose un test fondé sur la comparaison des distributions estimée et observée(4). Le test utilise la série des rentabilités extrêmes ordonnées. Par exemple, pour le maximum,

1A. Estimation des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités journalières minimales de l'indice SBF 240

Longueur de la période de sélection	Loi de Gumbel		Loi de Fréchet			Test Gumbel vs Fréchet	Test d'adéquation de Sherman	1 ^{er} décile	2 ^e décile
	α_n	β_n	α_n	β_n	τ				
Un mois n=21 (N=211)	0,78 (0,06)	-1,31 (0,04)	0,64 (0,04)	-1,25 (0,05)	-0,29 (0,06)	12,53 [<0,001]	0,60 [0,27]	-7,8% (1,0)	-6,1% (0,6)
Un trimestre n=63 (N=70)	1,13 (0,14)	-2,02 (0,10)	0,83 (0,11)	-1,87 (0,12)	-0,39 (0,14)	15,13 [<0,001]	0,14 [0,44]	-8,5% (1,8)	-6,3% (1,0)
Un semestre n=125 (N=35)	1,30 (0,39)	-2,96 (0,29)	1,38 (0,35)	-2,64 (0,33)	-0,37 (0,25)	8,93 [0,003]	0,42 [0,34]	-8,2% (1,7)	-6,1% (1,7)
Une année n=250 (N=17)	1,85 (0,68)	-3,58 (0,50)	1,56 (0,69)	-3,29 (0,54)	-0,34 (0,47)	3,06 [0,080]	-0,93 [0,82]	-7,8% (1,5)	-6,0% (1,7)

1B. Estimation des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités journalières maximales de l'indice SBF 240

Longueur de la période de sélection	Loi de Gumbel		Loi de Fréchet			Test Gumbel vs Fréchet	Test d'adéquation de Sherman	Dernier décile	Avant-dernier décile
	α_n	β_n	α_n	β_n	τ				
Un mois n=21 (N=211)	0,64 (0,05)	1,50 (0,04)	0,58 (0,04)	1,45 (0,05)	-0,18 (0,06)	11,02 [0,001]	-1,12 [0,87]	5,8% (0,6)	4,8% (0,4)
Un trimestre n=63 (N=70)	0,70 (0,10)	2,16 (0,07)	0,69 (0,09)	2,27 (0,12)	-0,19 (0,12)	5,51 [0,019]	0,47 [0,32]	5,6% (0,7)	4,7% (0,4)
Un semestre n=125 (N=35)	0,81 (0,15)	2,52 (0,11)	0,69 (0,12)	2,47 (0,15)	-0,27 (0,21)	4,65 [0,031]	-0,62 [0,73]	5,6% (0,9)	4,5% (0,5)
Une année n=250 (N=17)	0,95 (0,24)	3,10 (0,18)	0,76 (0,21)	2,93 (0,22)	-0,36 (0,48)	2,45 [0,117]	0,41 [0,34]	5,6% (1,4)	4,4% (0,6)

Note : ces tableaux rapportent les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres des lois asymptotiques de rentabilités minimales (tableau 1A) et maximales (tableau 1B) sur la période allant de janvier 1976 à décembre 1993. Deux cas sont considérés : la loi de Gumbel qui correspond à la contrainte $\tau=0$ et la loi de Fréchet qui correspond au cas plus général $\tau<0$. La première colonne donne la longueur de la période de sélection contenant n rentabilités journalières avec le nombre d'extrêmes N entre parenthèses ; les cinq colonnes suivantes rapportent les estimations des paramètres d'échelle α_n et de localisation β_n et de l'indice de queue τ pour les lois de Gumbel et de Fréchet ; la colonne suivante donne le résultat du test de ratio de vraisemblance entre la loi de Gumbel et la loi de Fréchet (avec la probabilité de dépassement entre crochets) ; la colonne suivante donne le résultat du test d'adéquation de Sherman de la loi de Fréchet à la loi empirique des extrêmes observés (avec la probabilité de dépassement entre crochets) ; les deux dernières colonnes donnent les valeurs du premier décile (fractile à 10 %) et du deuxième décile (fractile à 20 %) correspondant à des périodes de retour de 10 ans et 5 ans des rentabilités journalières minimales observées sur une année et les valeurs du dernier décile (fractile à 90 %) et de l'avant-dernier décile (fractile à 80 %) correspondant à des périodes de retour de 10 ans et 5 ans des rentabilités journalières maximales observées sur une année.

cette nouvelle série notée $(Y_{n,i}')_{i=1,N}$ vérifie: $Y_{n,1}' \geq Y_{n,2}' \leq \dots \leq Y_{n,N}'$. On calcule ensuite la statistique :

$$\Omega_N = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \left| F_{Y,n}(Y_{n,i+1}') - F_{Y,n}(Y_{n,i}') - \frac{1}{N+1} \right|$$

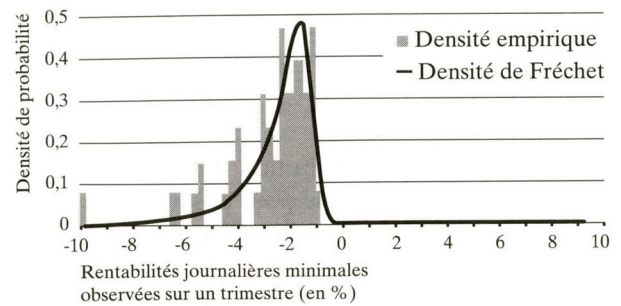
avec $F_{Y,n}(Y_{n,0}') = 0$ et $F_{Y,n}(Y_{n,N+1}') = 1$

La variable Ω_N est asymptotiquement distribuée comme une loi normale de moyenne $(N/(N+1))^{N+1}$ et de variance approchée $(2e-5)/(e^2N)$. Une faible valeur pour Ω_N indiquera que les distributions estimée et observée sont proches l'une de l'autre et que le comportement des extrêmes est bien décrit par la théorie. Au contraire, une valeur élevée pour Ω_N indiquera que les distributions estimée et observée sont éloignées l'une de l'autre et que la théorie ne convient pas. La valeur de Ω_N est comparée à une valeur seuil associée à un niveau de confiance donné (5 % par exemple). Si la valeur de la statistique Ω_N est supérieure au seuil fixé, l'hypothèse d'adéquation est rejetée. Le rejet peut être expliqué par le fait que les extrêmes retenus aient été sélectionnés sur des périodes trop courtes ; en d'autres termes, le nombre de rentabilités de base à partir desquelles les rentabilités extrêmes sont extraites n'est pas assez élevé. La théorie des valeurs extrêmes est, en effet, une théorie asymptotique, et nécessite de travailler avec un grand nombre d'observations afin d'être suffisamment proche de la limite.

Empiriquement, l'hypothèse d'adéquation de la loi de Fréchet aux extrêmes observés n'est pas rejetée : la valeur du test de Sherman est toujours petite en valeur absolue et inférieure au seuil de 5 % (cf. colonne «Test d'adéquation de Sherman» des tableaux 1A et 1B). Il semble donc que même pour des longueurs de sélection assez courtes (comme le mois ou le trimestre), il est possible d'utiliser la loi asymptotique. Ce résultat est confirmé graphiquement sur la figure 1 qui représente la loi empirique des extrêmes observés et la loi asymptotique estimée de Fréchet pour les minima (figure 1A) et pour les maxima (figure 1B).

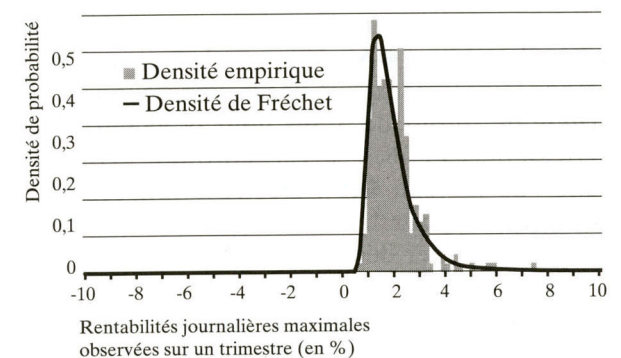
Une autre façon d'apprécier le caractère asymptotique de la loi des extrêmes est de comparer les fractiles de la loi obtenus à partir de différentes longueurs de la période de sélection. Par exemple, considérons le premier décile (premier fractile de 10 %) de la loi asymptotique des rentabilités minimales observées sur une année ($n=250$). En utilisant cette loi, nous déduisons que la valeur du premier décile est égale à -7,8 % (avec un écart-type d'estimation de 1,5).⁽⁵⁾ La figure 2 représente l'évolution du fractile en fonction de la probabilité avec les intervalles de confiance à un et deux écart-types. En d'autres termes, il y a une chance sur dix que la rentabilité journalière la plus faible de l'année soit inférieure à -7,8 % et neuf chances sur dix pour qu'elle soit supérieure à -7,8 %. Une autre manière de présenter ce résultat consiste à utiliser le concept de période de retour. Par définition, la période de retour moyenne d'un événement (comme le dépassement d'un certain seuil par une variable aléatoire) est la durée moyenne

Figure 1 A. **Distribution empirique et distribution estimée de Fréchet des rentabilités journalières minimales observées sur un trimestre**



Données de base : indice SBF 240 (janvier 1976-décembre 1993)

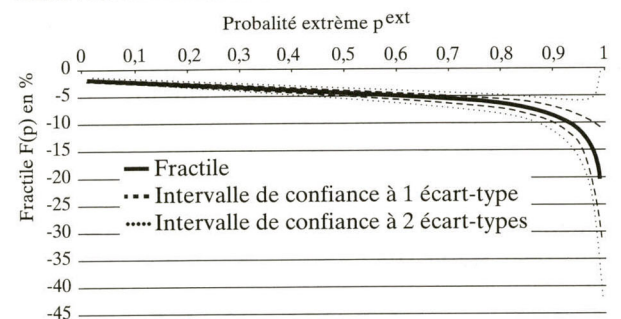
Figure 1 B. **Distribution empirique et distribution estimée de Fréchet des rentabilités journalières maximales observées sur un trimestre**



Données de base : indice SBF 240 (janvier 1976-décembre 1993)

Figure 1. Distribution empirique et distribution estimée de Fréchet des rentabilités journalières extrêmes observées sur un trimestre. La figure 1A pour les minima et la figure 1B pour les maxima comparent la distribution de Fréchet estimée des rentabilités extrêmes à la distribution empirique des rentabilités extrêmes observées. Les extrêmes sont sélectionnés sur des trimestres ne se recouvrant pas ($n=63$). Le test d'adéquation développé par Sherman (1957) permet de comparer quantitativement les deux distributions (voir tableau 1).

Figure 2. **Fractiles des rentabilités journalières minimales observées sur une année**



Données de base : indice SBF 240 (janvier 1976-décembre 1993).

Figure 2. Fractile des rentabilités journalières minimales observées sur une année. Le fractile F de la loi asymptotique de Fréchet des rentabilités journalières minimales observées sur une année est représenté pour une probabilité extrême p^{ext} . Le fractile $F(p^{ext})$ étant une variable statistique calculée à partir de données, il est important de connaître l'incertitude liée à son estimation statistique (erreur d'échantillonnage) : les intervalles de confiance du fractile à un et deux écart-types sont représentés sur la figure en trait pointillé.

qu'il faut attendre entre deux observations consécutives dans le temps de ce même événement. La période de retour moyenne T d'une réalisation d'une variable aléatoire X distribuée selon la loi F_X , inférieure ou égale à x , est donnée par la formule :

$$T(x) = \frac{1}{F_X(x)}$$

Appliquée à la distribution des extrêmes, il faut attendre 10 ans en moyenne pour observer une rentabilité journalière minimale sélectionnée sur une année inférieure à -7,8 %.

En supposant que le processus des rentabilités journalières est i.i.d., la valeur du premier décile peut aussi être obtenue à partir des autres lois asymptotiques correspondant à des longueurs de période de sélection différentes (6). Les résultats mettent en évidence la consistance des résultats : le premier décile varie entre -7,8 % et -8,5 % (cf. colonne «Premier décile» du tableau 1A). Une conclusion similaire est obtenue pour le deuxième décile correspondant à une période de retour de 5 ans dont la valeur se situe entre -6,0 % et -6,3 % (cf. colonne «Deuxième décile» du tableau 1A). Des résultats semblables sont obtenus pour les rentabilités maximales (cf. colonnes «Dernier décile» et «Avant-dernier décile» du tableau 1B).

Les lois asymptotiques d'extrêmes ont aussi été estimées à partir de rentabilités de base de différentes fréquences : une semaine et deux semaines. Cette partie de l'étude est guidée par la réglementation sur les risques de marché pour les institutions financières qui considère deux fréquences : 1 jour et 10 jours (se reporter au textes réglementaires du Comité de Bâle (1995 et 1996a et b)). La longueur de la période de sélection (le paramètre n) a été choisie de telle sorte que toutes les distributions soient estimées à partir du même nombre d'observations d'extrêmes ($N=35$). Les résultats empiriques sont reportés dans le tableau 2 pour trois fréquences données : 1 jour (rappel du tableau 1), 5 jours et 10 jours. Les lois d'extrêmes se déplacent vers la gauche (pour les minima) et vers la droite (pour les maxima) comme l'indique la valeur du paramètre de localisation qui augmente en valeur absolue, et sont de plus en plus dispersées comme l'indique la valeur du paramètre de dispersion qui augmente, alors que les queues de distribution décroissent de manière identique puisque la valeur de l'indice de queue reste stable (7).

B. Quelques titres individuels cotés à la Bourse de Paris

La loi asymptotique des valeurs extrêmes est maintenant estimée directement sur des titres individuels et non sur un indice boursier. Les titres choisis sont : Bouygues, Carrefour, Elf, L'Oréal, LVMH et Total. La base de données du Crédit commercial de France donne les prix de clôture journaliers de ces actions cotées à la Bourse de Paris sur la période allant de janvier 1973 à août 1996.

2 Estimation des paramètres des lois asymptotiques de rentabilités journalières, hebdomadaires et bimensuelles minimales et maximales de l'indice SBF 240

Fréquence des rentabilités de base	Rentabilités minimales			Rentabilités maximales		
	α_n	β_n	τ	α_n	β_n	τ
1 jour	1,38 (0,35)	-2,64 (0,33)	-0,37 (0,25)	0,69 (0,12)	2,47 (0,15)	-0,27 (0,21)
5 jours	1,61 (0,27)	-3,42 (0,31)	-0,36 (0,14)	1,36 (0,20)	4,16 (0,27)	-0,09 (0,15)
10 jours	2,16 (0,37)	-4,17 (0,44)	-0,31 (0,15)	1,85 (0,27)	5,30 (0,36)	-0,10 (0,12)

Note : ce tableau rapporte les estimations des lois asymptotiques des rentabilités minimales et maximales sélectionnées à partir de rentabilités de base calculées avec différentes fréquences (1 jour, 5 jours et 10 jours) sur la période allant de janvier 1976 à décembre 1993. La longueur de la période de sélection (le paramètre n) a été choisie de telle sorte que toutes les distributions soient estimées à partir du même nombre d'observations d'extrêmes ($N=35$). Les trois paramètres de ces lois (les paramètres d'échelle et de localisation α_n et β_n , et l'indice de queue τ) sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. L'écart-type de chaque valeur estimée est donnée entre parenthèses.

3 Estimation des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités journalières extrêmes de quelques titres individuels cotés à la Bourse de Paris

Actions	Rentabilités minimales			Rentabilités maximales		
	α_n	β_n	τ	α_n	β_n	τ
Bouygues	1,85 (0,42)	-4,86 (0,59)	-0,35 (0,17)	2,11 (0,29)	5,67 (0,41)	-0,26 (0,12)
Carrefour	1,89 (0,35)	-4,17 (0,38)	-0,31 (0,17)	1,22 (0,18)	3,93 (0,37)	-0,40 (0,25)
Elf	1,60 (0,27)	-4,58 (0,36)	-0,27 (0,15)	1,65 (0,21)	5,23 (0,45)	-0,22 (0,17)
L'Oréal	1,36 (0,20)	-4,23 (0,33)	-0,22 (0,10)	1,33 (0,20)	4,63 (0,32)	-0,23 (0,20)
LVMH	1,80 (0,35)	-4,35 (0,33)	-0,48 (-0,25)	1,98 (0,27)	4,95 (0,18)	-0,28 (0,18)
Total	2,00 (0,31)	-5,10 (0,36)	-0,33 (0,15)	1,91 (0,21)	5,42 (0,36)	-0,07 (0,07)

Note : ce tableau rapporte les estimations du maximum de vraisemblance des trois paramètres de la loi asymptotique des rentabilités minimales et maximales : les paramètres d'échelle et de localisation α_n et β_n , et l'indice de queue τ . Les extrêmes sont sélectionnés sur des semestres ($n=125$) ne se recouvrant pas sur la période allant de janvier 1973 à août 1996. L'écart-type de chaque valeur estimée est donnée entre parenthèses.

Les résultats empiriques sont donnés dans le tableau 3 pour les rentabilités journalières minimales et maximales sélectionnées sur un semestre ($n=125$). Pour tous les titres sélectionnés et pour les deux types d'extrêmes, la loi asymptotique est une loi de Fréchet. Les valeurs estimées de l'indice de queue sont négatives et assez proches d'une entreprise à l'autre : pour les rentabilités minimales, elles varient de -0,22 pour L'Oréal à -0,48 pour LVMH ; pour les rentabilités maximales, elles varient de -0,07 pour Total à -0,40 pour Carrefour. Il n'apparaît pas clairement de différences significatives entre les rentabilités minimales et maximales.

4A. Estimation des paramètres de la loi asymptotique des variations journalières minimales du taux au jour le jour en France

Longueur de la période de sélection	Loi de Gumbel		Loi de Fréchet			Test Gumbel vs Fréchet	Test d'adéquation de Sherman	1 ^{er} décile	2 ^e décile
	α_n	β_n	α_n	β_n	τ				
Un mois n=21 (N=187)	2,29 (0,18)	-2,67 (0,14)	1,94 (0,15)	-2,34 (0,16)	-0,28 (0,07)	22,50 [<0,001]	1,00 [0,16]	-21,6 (3,4)	-12,2 (1,2)
Un trimestre n=63 (N=62)	3,18 (0,44)	-4,47 (0,33)	2,87 (0,40)	-4,13 (0,46)	-0,20 (0,11)	6,46 [0,003]	-0,15 [0,56]	-19,6 (2,7)	-11,6 (1,0)
Un semestre n=125 (N=31)	3,89 (0,76)	-5,89 (0,56)	3,40 (0,71)	-5,40 (0,89)	-0,25 (0,21)	4,90 [0,008]	-0,57 [0,72]	-20,2 (3,8)	-10,9 (1,3)
Une année n=250 (N=15)	5,20 (1,41)	-8,07 (1,05)	4,56 (1,10)	-7,44 (1,75)	-0,25 (0,41)	1,84 [0,019]	0,08 [0,47]	-21,2 (5,2)	-10,8 (1,7)

4B. Estimation des paramètres de la loi asymptotique des variations journalières maximales du taux au jour le jour en France

Longueur de la période de sélection	Loi de Gumbel		Loi de Fréchet			Test Gumbel vs Fréchet	Test d'adéquation de Sherman	Dernier décile	Avant-dernier décile
	α_n	β_n	α_n	β_n	τ				
Un mois n=21 (N=187)	2,96 (0,24)	2,63 (0,18)	2,24 (0,24)	2,04 (0,18)	-0,40 (0,09)	53,10 [<0,001]	0,86 [0,19]	33,1 (7,0)	23,7 (4,0)
Un trimestre n=63 (N=62)	4,74 (0,66)	4,77 (0,49)	3,68 (0,61)	3,90 (0,55)	-0,37 (0,15)	18,40 [<0,001]	0,88 [0,19]	32,2 (7,3)	23,0 (4,0)
Un semestre n=125 (N=31)	6,07 (1,19)	7,02 (0,88)	4,62 (1,06)	5,90 (1,06)	-0,39 (0,23)	10,08 [0,001]	0,30 [0,38]	31,2 (8,1)	21,8 (4,1)
Une année n=250 (N=15)	8,45 (2,30)	11,11 (1,70)	6,99 (1,83)	9,82 (2,28)	-0,31 (0,32)	3,06 [0,012]	0,68 [0,25]	32,7 (8,4)	23,2 (4,4)

Note : ces tableaux rapportent les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres des lois asymptotiques de variations de taux journalières minimales (tableau 4A) et maximales (tableau 4B) sur la période allant de janvier 1981 à août 1996. Deux cas sont considérés : la loi de Gumbel qui correspond à la contrainte $\tau=0$ et la loi de Fréchet qui correspond au cas plus général $\tau<0$. La première colonne donne la longueur de la période de sélection contenant n rentabilités journalières avec le nombre d'extrêmes N entre parenthèses ; les cinq colonnes suivantes rapportent les estimations des paramètres d'échelle α_n et de localisation β_n et de l'indice de queue τ pour les lois de Gumbel et de Fréchet ; la colonne suivante donne le résultat du test de ratio de vraisemblance entre la loi de Gumbel et la loi de Fréchet (avec la probabilité de dépassement entre crochets) ; la colonne suivante donne le résultat du test d'adéquation de Sherman de la loi de Fréchet à la loi empirique des extrêmes observés (avec la probabilité de dépassement entre crochets) ; les deux dernières colonnes donnent les valeurs du premier décile (fractile à 10 %) et du deuxième décile (fractile à 20 %) correspondant à des périodes de retour de 10 ans et 5 ans pour les variations de taux journalières minimales observées sur une année et les valeurs du dernier décile (fractile à 90 %) et de l'avant-dernier décile (fractile à 80 %) correspondant à des périodes de retour de 10 ans et 5 ans pour les variations de taux journalières maximales observées sur une année avec les écart-types entre parenthèses.

La comparaison avec les résultats concernant l'indice SBF 240 permet d'étudier le phénomène d'agrégation des titres. Pour les rentabilités minimales et maximales, la valeur de l'indice de queue τ est similaire pour les titres individuels et pour l'indice alors que la dispersion (le paramètre α_n) et l'amplitude (le paramètre β_n) de la distribution sont plus fortes pour les titres individuels que pour l'indice. Par exemple, l'amplitude des plus fortes baisses journalières sur un semestre pour l'indice est de -2,64 % alors qu'elle est de -4,86 % pour Bouygues, -4,17 % pour Carrefour, -4,18 % pour Elf, -4,23 % pour L'Oréal, -4,35 % pour LVMH et -5,10 % pour Total.

2. Taux d'intérêt

La loi des valeurs extrêmes est aussi appliquée à une série de taux à court terme sur le marché français. La base du Crédit commercial de France comprend les données journalières du taux au jour le jour (TJJ) pour la période allant de janvier 1981 à août 1996 comprenant 3 945 observations.

Les résultats sont présentés dans les tableaux 4A et 4B pour les variations de taux (des variations relatives de taux auraient aussi pu être utilisées). Les résultats empiriques montrent que le type de loi asymptotique est aussi une loi de Fréchet : comme les données sur actions, l'indice de queue est aussi négatif ; sa valeur est comprise entre -0,20 et -0,28 pour les variations minimales du TJJ et entre -0,31 et -0,40 pour les variations maximales.

III Charge en fonds propres

1. Rappel sur la réglementation

Le concept de *Value at Risk* (VaR) s'est imposé comme standard pour mesurer les risques de marché (8). La VaR d'une position de marché est un nombre censé mesurer et résumer le risque encouru sur cette position ; elle est définie comme la perte potentielle maximale pour une probabilité fixée sur une période

donnée. Les risques considérés sont généralement ceux liés aux fluctuations des taux d'intérêt, du cours de change des monnaies, du prix des actions et du cours des matières premières.

En France, comme l'explique Nouy (1996), la Commission bancaire (Règlement n° 95-02) a finalement adopté en application de la directive d'adéquation des fonds propres de l'Union européenne (*Capital Adequacy Directive* CAD, juin 1993) la formule suivante pour calculer la charge en fonds propres liée à l'activité de marché:

$$CFP_t = \text{Max} \left(CFPMS_{t-1}, CFPMS_{t-1} \cdot \frac{VaR_{t-1}}{VaR_t}, m \cdot VaR_{t-1} \right) \quad [7]$$

dans laquelle la charge en fonds propres calculée d'après la méthode standard de la CAD, notée CFPMS, est comparée à la VaR donnée par le modèle interne, m étant un facteur multiplicatif compris entre 3 et 4 reflétant la qualité du modèle (voir Comité de Bâle (1996a)), $t-1$ la date d'arrêté, t la période d'application et t' une date de référence passée.

Si le concept de VaR s'est imposé comme standard dans le secteur bancaire, son application pratique présente une certaine diversité : de nombreuses méthodes de calcul sont actuellement développées dans les banques. Ces méthodes peuvent se regrouper en trois catégories: les méthodes historiques, les méthodes de simulation de Monte Carlo et les méthodes de variance covariance utilisant la loi normale.

Comme il a déjà été signalé, ces méthodes prennent difficilement en compte les extrêmes des marchés financiers. Par exemple, la méthode historique utilise souvent une période trop courte et trop récente (6 mois ou un an) pour tenir compte des conditions de crise rencontrées dans un passé plus lointain. Les méthodes paramétriques de simulation de Monte Carlo ou de variance covariance spécifient des distributions comme la loi normale dont le poids des extrêmes est souvent sous estimé.

2. VaR : l'apport des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes présentée précédemment peut être utilisée pour élaborer des scénarios de stress cohérents avec les risques financiers passés, ou calculer une VaR qui tienne compte des valeurs extrêmes (9).

Nous allons comparer la valeur de la charge en fonds propres donnée par les réglementations BRI et CAD, aux valeurs de charge en fonds propres déduites de VaR estimées selon les deux méthodes suivantes:

- la méthode historique classique. A partir de l'historique des rentabilités bimensuelles de la position, nous sélectionnons le fractile à 99 %. La figure 3 illustre graphiquement la méthode historique.
- la méthode des valeurs extrêmes. A partir de l'his-

torique des rentabilités bimensuelles de la position, nous sélectionnons les rentabilités extrêmes sur des sous-périodes ne se recouvrant pas et contenant n rentabilités de base ; dans l'étude empirique, nous prenons 6 mois correspondant à 13 périodes de 10 jours ($n=13$). Nous estimons ensuite la distribution des rentabilités minimales (nous considérons une position longue) ; nous utilisons les résultats d'estimation reportés sur la dernière ligne du tableau 2 correspondant à une fréquence de 10 jours. A partir de cette distribution, nous sélectionnons le fractile à 99 % à la puissance n d'après la formule 2 pour le minimum ($n=13$ donnant $p^{ext}=0,877$) (10). La figure 4 illustre graphiquement la méthode des valeurs extrêmes.

3. VaR et période de retour pour une position sur le marché boursier français

Empiriquement, pour une position longue sur le marché français, la VaR est égale à 11,08 % calculée par la méthode historique et égale à 10,19 % calculée par la méthode des valeurs extrêmes ; ces chiffres sont d'ailleurs proches du niveau de capital de 12 % préconisé par la réglementation (4 % de risque spécifique et 8 % de risque global pour un portefeuille liquide). En appliquant la formule donnée par le Comité de Bâle ou la Commission européenne (3 fois la VaR), nous trouvons des niveaux de fonds propres de 33,24 % pour la méthode historique et de 30,57 % pour la méthode des valeurs extrêmes. La méthode standard, proposée par les régulateurs, recommande un montant forfaitaire de 12 % qui dans le cas du marché boursier français est moins contraignant.

Ces résultats peuvent aussi s'analyser à l'aide du concept de période de retour introduit en partie II 1. Par définition, la période de retour moyenne est la durée qu'il faut attendre entre l'observation de deux événements identiques (par exemple, une chute du marché supérieure à x %). Pour calculer la période de retour moyenne d'une chute du marché dépassant le capital réglementaire, nous utilisons la distribution des valeurs extrêmes et non la distribution empirique ; en effet, la distribution des valeurs extrêmes est paramétrique et permet donc d'évaluer la période de retour pour des événements de très faible probabilité alors que la distribution empirique ne le permet pas toujours en raison du nombre limité de données. Ainsi, nous pouvons donner la durée de retour moyenne d'une chute du marché au moins égale au capital requis de 30,57 % bien qu'un tel mouvement n'ait jamais été observé. Un tel événement devrait se produire tous les 94 ans en moyenne. Inversement, nous pouvons calculer la période de retour moyenne pour un niveau de capital donné. Le niveau de capital de 12 % fixé par la méthode standard correspond à une période de retour moyenne d'environ 6 ans.